3. Tangentialbündel

3.1. **Tangentialräume der Untermannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^n$.** In dieser Abschnitt wiederholen wir die Untermannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^n$ und ihre Tangentialräume aus Analysis II.

Definition 3.1. Sei $1 \leq m \leq n$. Eine Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ heisst m-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ der Klasse C^r, wobei $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, falls gilt: zu jedem $p \in M$ gibt es eine offene Umgebung $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und einen C^r-Diffeomorphismus $\varphi : \Omega \to \varphi(\Omega)$ mit

$$\varphi(M \cap \Omega) = (\mathbb{R}^m \times \{0\}) \cap \varphi(\Omega).$$

Wir nennen den Diffeomorphismus φ eine (lokale) Plättung von M. Im Einzelfall kann der Nachweis, dass eine gegebene Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Untermannigfaltigkeit ist, anhand der Definition mühevoll sein. Für Mengen, die als Niveaumengen einer Funktion gegeben sind, liefert jedoch der Satz über implizite Funktionen folgendes Kriterium.

Satz 3.2 (Untermannigfaltigkeitskriterien)**.** *Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ und $m+k = n$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(1) M ist eine m-dimensionale Untermannigfaltigkeit der Klasse C^r.

(2) Niveaumengenkriterium: *Zu $p \in M$ gibt es eine offene Umgebung $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und eine Funktion $f \in C^r(\Omega, \mathbb{R}^k)$, so dass $M \cap \Omega = f^{-1}(0)$ und $\operatorname{rang} Df = k$ auf Ω.*

(3) Graphenkriterium: *Zu $p \in M$ gibt es eine offene Umgebung $U \times V \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k$ und $g \in C^r(U, V)$, so dass nach geeigneter Permutation der Koordinaten gilt:*

$$M \cap (U \times V) = \{(x, g(x)) : x \in U\}.$$

Proof. Wir zeigen (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (1). Es gelte (1), das heißt zu jedem $p \in M$ gibt es eine lokale Plättung $\varphi : \Omega \to \varphi(\Omega)$ der Klasse C^r mit $p \in \Omega$. Sei $\pi^\perp : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ die Projektion auf den zweiten Faktor. Dann folgt mit $f = \pi^\perp \circ \varphi$ für $q \in \Omega$

$$f(q) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \varphi(q) \in \mathbb{R}^m \times \{0\} \quad \Leftrightarrow \quad q \in \varphi^{-1}(\mathbb{R}^m \times \{0\}) = M \cap \Omega.$$

Außerdem gilt $\operatorname{rang} Df = \operatorname{rang} \big(\pi^\perp \circ D\varphi\big) = k$ und $f \in C^r(\Omega, \mathbb{R}^k)$.

Ist (2) erfüllt, so ist nach evtl. Permutation der Koordinaten $D_y f(p)$ invertierbar, wobei $(x, y) \in \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k$, und (3) folgt aus dem Satz über implizite Funktionen.

Für (3) $\Rightarrow$ (1) können wir annehmen, dass die Graphendarstellung ohne Permuation der Koordinaten gilt. Wir setzen $\Omega = U \times V$ und

$$\varphi : \Omega \to \varphi(\Omega),\ \varphi(x, y) = \big(x, y - g(x)\big).$$

Dann ist $\varphi \in C^r(\Omega, \mathbb{R}^n)$ injektiv und es gilt

$$D\varphi(x, y) = \begin{pmatrix} E_m & 0 \\ -Dg(x) & E_k \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \det D\varphi(x, y) = 1 \quad \text{für alle } (x, y) \in \Omega.$$

Also ist $\varphi : \Omega \to \varphi(\Omega)$ ein Diffeomorphismus der Klasse C^r nach dem Umkehrsatz. Da $(x, y) \in M \cap \Omega$ genau wenn $y = g(x)$, also $\varphi(x, y) \in \mathbb{R}^k \times \{0\}$, ist die in (1) verlangte lokale Plättung gefunden. □

Beispiel 3.3. *Die Sphäre $\mathbb{S}^m = \{x \in \mathbb{R}^{m+1} : |x| = 1\}$ ist eine m-dimensionale Untermannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^{m+1}$ der Klasse C^∞. Denn es gilt*

$$\mathbb{S}^m = f^{-1}(0) \ \textit{für}\ f : \mathbb{R}^{m+1} \backslash \{0\} \to \mathbb{R},\ f(x) = |x|^2 - 1,$$

und $Df(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^{m+1} \backslash \{0\}$. Die Behauptung folgt also aus Satz 3.2.

Definition 3.4. Ein Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ heisst *Tangentialvektor* von $M \subset \mathbb{R}^n$ am Punkt $p \in M$, falls es eine Abbildung $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ gibt mit $\gamma(0) = p$, $\gamma'(0) = v$. Die Menge der Tangentialvektoren von M im Punkt p wird mit T_pM bezeichnet.

Folgerung 3.5. *Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine m-dimensionale C^1-Untermannigfaltigkeit, und $n = m + k$. Ist $p \in M \cap \Omega = f^{-1}(0)$ für eine Funktion $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^k)$ mit* $\operatorname{rang} Df = k$ *auf* Ω*, so gilt*

$$T_pM = \ker Df(p).$$

Insbesondere ist T_pM ein m-dimensionaler Unterraum des $\mathbb{R}^n$.

Proof. Für $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ mit $\gamma(0) = p$ und $\gamma'(0) = w$ gilt

$$0 = \frac{d}{dt} f\big(\gamma(t)\big)|_{t=0} = Df\big(\gamma(0)\big)\gamma'(0) = Df(p)\, w \quad \Rightarrow \quad T_pM \subset \ker Df(p).$$

Nach Satz 3.2 gibt es andererseits, nach eventueller Permutation der Koordinaten, offene Mengen $U \subset \mathbb{R}^m$, $V \subset \mathbb{R}^k$ mit $p \in U \times V$, sowie $g \in C^1(U, V)$ mit

$$M \cap (U \times V) = \{(x, g(x)) : x \in U\}.$$

Die Graphenabbildung $G \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$, $G(x) = (x, g(x))$, bildet nach M ab. Schreiben wir $p = (x_0, g(x_0))$ für geeignetes $x_0 \in U$, so folgt für alle $v \in \mathbb{R}^m$

$$DG(x_0)v = \frac{d}{dt} G(x_0 + tv)|_{t=0} \in T_pM \quad \Rightarrow \quad \operatorname{Bild} DG(x_0) \subset T_pM.$$

Zusammenfassend ist $\operatorname{Bild} DG(x_0) \subset T_pM \subset \ker Df(p)$. Aber $DG(x_0)$ ist injektiv, denn $DG(x_0)v = (v, Dg(x_0)v)$, und wegen $\operatorname{rang} Df(p) = k$ folgt mit der Dimensionsformel

$$\dim \operatorname{Bild} DG(x_0) = m = n - \operatorname{rang} Df(p) = \dim \ker Df(p).$$

Also gilt $\operatorname{Bild} DG(x_0) = \ker Df(p) = T_pM$. □

Die Folgerung zeigt, dass der Tangentialraum einer m-dimensionalen Untermannigfaltigkeit tatsächlich ein m-dimensionaler Vektorraum ist. Dies zeigt, dass die Dimension einer C^1-Untermannigfaltigkeit wohldefiniert ist, das heißt es kann nicht Plättungen mit verschiedenen Dimensionen von M geben.

3.2. **Tangentialbündel der abstrakten Mannigfaltigkeiten.** Wir wollen die Definition von Tangentialraum für die Untermanifaltigkeit auf abstrakte Mannigfaltigkeiten M verallgemeinern: Sei $x \in M$. Betrachte alle differenzierbaren Kurven $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ mit $\alpha(0) = x$. Anderes als in der Untermanifaltigkeit können wir nicht direkt $\alpha'(0)$ definieren. Anstatt definieren wir wie Folgendes: Zwei solche Kurven α und β heißen äquivalent, wenn es eine Karte (U, φ) um x mit

$$(\varphi \circ \alpha)'(0) = (\varphi \circ \beta)'(0)$$

gibt. Gilt diese Relation für eine Karte (U, φ), so auch für jede andere Karte (V, ψ) um x:

$$\begin{aligned}(\psi \circ \alpha)'(0) &= \left(\left(\psi \circ \varphi^{-1}\right) \circ \varphi \circ \alpha\right)'(0) = d\left(\psi \circ \varphi^{-1}\right)(\varphi(\alpha(0)))\langle(\varphi \circ \alpha)'(0)\rangle \\ &= d\left(\psi \circ \varphi^{-1}\right)(\varphi(\alpha(0)))\langle(\varphi \circ \beta)'(0)\rangle = (\psi \circ \beta)'(0).\end{aligned}$$

Hieraus folgt auch die Transitiviät dieser Relation.

Definition 3.6. Ein *Tangentialvektor* im Punkt x ist eine Äquivalenzklasse $[\alpha]$ von differenzierbaren Kurven $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ mit $\alpha(0) = x$.

Die Menge dieser Äquivalenzklassen heißt *Tangentialraum* im Punkt x: T_xM.

Definition 3.7. Die (disjunkte) Vereinigung

$$TM := \bigcup_{p \in M} \{p\} \times T_pM$$

heißt Tangentialbündel von M. Für eine offene Teilmenge $U \subset M$ setze $TU := \bigcup_{p \in U} \{p\} \times T_pM$.

Man kann zeigen, dass TM eine $2n$-dimensionale Mannigfaltigkeit.

Hier benutzen wir den folgenden Weg, um die Tangentialbündel besser zu verstanden.

Zunächst definieren wir der Tangentialraum und Tangentialbündel für offene Mengen im $\mathbb{R}^m$.

Definition 3.8. Seien $x = (x^1, \cdots, x^m)$ die euklidische Koordinaten vom $\mathbb{R}^m$, $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ offen mit $x_0 \in \Omega$. Der Tangentialraum von Ω in x_0

$$T_{x_0}\Omega$$

ist der Raum $\{x_0\} \times E$, wobei E der von $\frac{\partial}{\partial x^1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x^m}$ aufgespannte m-dimensional Vektorraum.

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^m$, $\Omega' \subset \mathbb{R}^l$ und $f : \Omega \to \Omega'$ differenzierbar mit $x_0 \in \Omega$. Wie in Analysis II definieren das *Differential* $df(x_0)$ (oder df_{x_0}) als eine linear Abbildung zwischen die Tangentialräume

$$\begin{array}{rcl} df(x_o) : T_{x_0}\Omega & \to & T_{f(x_0)}\Omega' \\ \xi = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} & \mapsto & \xi^i \frac{\partial f^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial y^j}, \end{array}$$

wobei $\{\frac{\partial}{\partial y^1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial y^l}\}$ die Basis von $T_{f(x_0)}\Omega'$ ist. Hier benutzen wir die Einstein Konvention.

Definition 3.9. Der *Tangentialbündel von* Ω ist dann definiert durch $T\Omega := \Omega \times E \cong \Omega \times \mathbb{R}^m$. Da $T\Omega$ offen in $\mathbb{R}^{2m} = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ ist, ist $T\Omega$ eine Mannigfaltigkeit. Definiere

$$\begin{array}{rcl} \pi : T\Omega & \to & \Omega \\ (x, \xi) & \mapsto & x \end{array}$$

die Projektion nach den Fußpunkt (den ersten Faktor). Es ist klar, dass π glatt ist. Das Tripel $(T\Omega, \Omega, \pi)$ heißt auch der Tangentialbündel von Ω.

Das Differential df bildet eine glatt Abbbildung zwischen die Tangentialbündel

$$\begin{array}{rcl} df : T\Omega & \to & T\Omega' \\ (x, \xi) = (x, \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}) & \mapsto & (f(x), \xi^i \frac{\partial f^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial y^j}), \end{array}$$

Wir bezeichnen $df(x, \xi)$ mit $df(x)(\xi)$, oder $df_x(\xi)$.

Spezialfall. Sei $f : \Omega \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion. Wir wissen: für $\xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}$

$$df(x)(\xi) = \xi^i \frac{\partial f}{\partial x^i}(x) \in T_{f(x)}\mathbb{R} \cong \mathbb{R}.$$

In diesem Fall, statt $df(x)(\xi)$ schreiben wir $\xi(f)(x)$.

Lemma 3.10. *Sei M eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit, $(x, U), (y, V)$ zwei Karten um $p \in M$ und $\xi, \eta \in\in \mathbb{R}^n$. Dann erklärt*

$$((x, U), \xi) \sim ((y, V), \eta) :\Leftrightarrow \eta = d(y \circ x^{-1})(x(p))\xi \tag{3.1}$$

eine Äquivalenzrelation.

Proof. Die Reflexivit at ist klar, die Symmetrie folgt aus

$$\eta = d(y \circ x^{-1})(x(p))\xi \Leftrightarrow \xi = \left(d(y \circ x^{-1})(x(p))\right)^{-1} \eta = d\left((y \circ x^{-1})^{-1}\right)(y(p))\eta = d(x \circ y^{-1})(y(p))\eta.$$

Die Transitivität folgt aus der Kettenregel. (Übung). □

Definition 3.11. Der Tangentialraum von M in p ist der Raum der Aquivalenzklassen

$$T_pM = \{(x, U) \in \mathcal{A} : p \in U\} \times \mathbb{R}^n / \sim$$

Ein Tangentialvektor $v \in T_pM$ wird durch $(x, U), \xi)$ repräsentiert. Wir nennen ξ den *Hauptteil* des Tangentialvektors v bezüglich der Karte x.

In Matrixschreibweise lautet (3.1)

$$\eta^j = \frac{\partial (y \circ x^{-1})^j}{\partial x^i}(x(p))\xi^i, \quad j = 1, \cdots, n$$

Tangentialvektoren transformieren sich mit der Jacobimatrix des Kartenwechsels.

Die Vektorraumstruktur der Hauptteile macht T_pM zu einem Vektorraum:

Lemma 3.12. *Auf T_pM gibt es eine Vektorraumstruktur, so dass $\xi \mapsto [(x, U), \xi]$ für jede Karte Isomorphismus von n-dimensionalen Vektorräumen ist.*

Proof. Erklären wir die Vektorraumstruktur auf T_pM bzgl. einer Karte (x, U) um p, so müssen wir zeigen, dass jede andere Karte (y, V) um p dieselbe Struktur ergibt. Dies liegt daran, dass $d(y \circ x^{-1})(x(p))$ linear ist.

Gilt

$$((x, U), \xi_i) \sim ((y, V), \eta_i) \quad \text{für } i = 1, 2, \quad d.h.\ \eta_i = d(y \circ x^{-1})\xi_i,$$

so folgt

$$\lambda_1\eta_1 + \lambda_2\eta_2 = d(y \circ x^{-1})(\lambda_1\xi_1 + \lambda\xi_2), \quad \text{also } ((x, U), \lambda_1\xi_1 + \lambda_2\xi_2) \sim ((y, V), \lambda_1\eta_1 + \lambda_2\eta_2).$$

Ferner ist $d(y \circ x^{-1}))(x(p))$ bijektiv und daher $\xi \mapsto [(x, U), \xi]$ Isomorphismus. □

Betrachten wir die Basis $e_1 = (1, 0, \cdots, 0), \cdots, e_n = (0, \cdots, 0, 1)$ von $\mathbb{R}^n$. Wir bezeichnen die dadurch gegebenen Aquivalenzklassen $\frac{\partial}{\partial x^i}(p) := [((x, U), e_i)]$ $i = 1, \cdots, n$ als Standardbasis von T_pM bzgl. der Karte (x, U). Bezüglich einer anderen Karte (y, V) ergibt sich im allgemeinen eine andere Standardbasis $\frac{\partial}{\partial f^i} := [((y, V), e_i)]$ von T_pM, denn $d(y \circ x^{-1})e_1, \cdots, d(y \circ x^{-1})e_n$ ist in der Regel von $(e_1, \cdots, e_n)$ verschieden. Man sagt, auf dem Tangentialraum T_pM gibt es keine kanonische Basis, d.h. jede Basiswahl ist willkdirurlich oder kartenabhängig!

Für R^n verwenden wir stets nur die eine Karte id, identizieren Hauptteile mit Tangentialvektoren v.

Wir ordnen jedem Tangentialvektor einer Mannigfaltigkeit eine Ableitung zu. Im Euklidischen entspricht dies der Richtungsableitung $\partial_\xi f(p) = df_p(\xi)$ einer skalarwertigen Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Wir ersetzen jetzt $\mathbb{R}^n$ durch eine Mannigfaltigkeit.

Definition 3.13. Die Ableitung (oder Lie-Ableitung) von $f \in C^\infty(M)$ im Punkt $p \in M^n$ in Richtung $v \in T_pM$ ist

$$\partial_\xi f(p) := \partial : \xi(f \circ x^{-1})(x(p)) = d(f \circ x^{-1})(x(p))\xi = d(f \circ x^{-1})_{x(p)}\xi = \xi^i \frac{\partial(f \circ x^{-1})}{\partial x^i}(x(p)) \in \mathbb{R}.$$

wobei (x, U) Karte um p mit $v = [(x, U), \xi]$. Andere gebräuchliche Bezeichnungen für die Lie-Ableitung sind $v(f)$ und L_vf.

Um zu zeigen, dass ∂_f unabhängig von der Karte x definiert ist, beachten wir eine weitere Karte (y, V) mit $v = ((y, V), \eta)$

$$\begin{aligned} d(f \circ x^{-1})_{x(p)}\xi &= d(f \circ y^{-1} \circ y \circ x^{-1})_{x(p)}\xi \\ &= d(f \circ y^{-1})_{y(p)} \left(d(y \circ x^{-1})_{x(p)}\xi\right) = d(f \circ y^{-1})_{y(p)}\eta. \end{aligned}$$

Die Lie-Ableitung ist eine Operation mit den derivativen Eigenschaften $\partial_\xi(cf + dg) = c\partial_\xi f + d\partial_\xi g$ (Linearität) und $\partial_\xi(fg) = f\partial_\xi g + (\partial_\xi f)g$ (Produktregel).

Im Spezialfall, dass der Vektor ein Element der Standardbasis e_i bzgl. der Karte x ist, schreiben wir auch als Lie-Ableitung

$$\frac{\partial}{\partial x^i} := \partial_{e_i} \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial x^i}_{|p} f := \partial_i(f \circ x^{-1})(x(p))$$

bzw. entsprechend $\frac{\partial f}{\partial x^i}(p)$, dabei haben wir mit $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$ die Ableitung nach der i-ten Variablen in $\mathbb{R}^n$ bezeichnet. Mit dieser Notation kann man die Lie-Ableitung auf Mannigfaltigkeiten wörtlich wie die euklidische Richtungsableitung notieren:

$$\partial_\xi f(p) = \xi^i \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) \in \mathbb{R}.$$

Definition 3.14 (Tangentialbündel)**.** Es sei (x_α, U_a) Karte um $p \in M$ und $v = [(x, U_\alpha), \xi_\alpha] \in T_pM$ ein Tangentialvektor. Auf der disjunkten Vereinigung der Tangentialräume

$$TM := \cup_{p \in M}\{p\} \times T_pM$$

definieren wir die Abbildung

$$dx_\alpha : TU_\alpha \to Tx_\alpha(U_\alpha), \quad dx_\alpha(p, v) := (x_\alpha(p), \xi_\alpha),$$

wobei $TU = \cup_{p\in U}\{p\} \times T_pM$ und $Tx_\alpha(U)$ die Tangentialbündel von offene Menge $x_\alpha(U_\alpha)$ sind.

Theorem 3.15. *Sei M eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit mit Atlas amthcal$A_M = \{(x_\alpha, U_\alpha) \,|\, \alpha \in A\}$ Auf der Menge TM bestimmt dann*

$$\mathcal{A}_{TM} := \{(dx_\alpha, TU_\alpha) \,|\, \alpha \in A\}$$

einen Atlas, der TM die Struktur einer $2n$-dimensionalen Mannigfaltigkeit gibt, unabhängig vom gewdirahlten Atlas $\mathcal{A}_M$.

Wir nennen die so erkl arte Mannigfaltigkeit TM das Tangentialbündel und schreiben Elemente in der Form $[p, (x_\alpha, U_\alpha), \xi_a]$.

Proof. Sicherlich überdeckt $\mathcal{A}_{TM}$ die Menge TM. Die Topologie auf TM können wir wie vorher wählen, so dass TU_α offen und $dx_\alpha : U_\alpha \to Tx_\alpha(U_\alpha)$ homoemorph sind.

Wir zeigen nun, dass je zwei Karten (dx_α, TU_α) und (dx_β, TU_β) verträglich sind. Sei dazu $p \in U_\alpha \cap U_\beta$ und

$$(p, v) = (p, (x_\alpha, U_\alpha), \xi_a) = (p, (x_\beta, U_\beta), \xi_\beta), \quad d.h.\ \xi_\beta = d(x_\beta \circ x_\alpha^{-1})\xi_\alpha.$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned}(dx_\beta \circ dx_a^{-1})(x_\alpha, \xi_\alpha) &= dx_\beta(p, v) = (x_\beta(p), \xi_\beta) \\ &= (x_\beta(p), d(x_\beta \circ x_\alpha^{-1}\xi_\alpha))\end{aligned}$$

D. h,

$$dx_\beta \circ dx_a^{-1} = (x_\beta \circ x_\alpha^{-1}, d(x_\beta \circ x_\alpha^{-1})).$$

Die erste Komponente ist aber ein dierenzierbarer Kartenwechsel und die zweite ein Differential einer glatten Funktion, also selbst glatt. Daher ist $\mathcal{A}_{TM}$ ein Atlas und die dierenzierbare Struktur unabhängig von den Karten von M $\square$

Beispiel 3.16. Das Tangentialbündel von $\mathbb{S}^1$ kann man als Zylinder $S^1 \times \mathbb{R}$ deuten, d.h. es ist dieomorph dazu.