Definition 3.17 (Differential)**.** Sei $f : M \to N$ eine differenzierbare Abbildung zwischen zwei Mannigfaltigkeiten. Das *differential* $df : TM \to TN$ ist die Abbildung

$$(p, v) = (p, [(x, U), \xi]) \mapsto df(p, v) = \big(f(p), [(y, V), d(y \circ f \circ x^{-1})_{x(p)}\xi]\big)\,,$$

wobei (x, U) eine Karte von M um p und (y, V) eine Karte von N um $f(p)$ ist. Wir benutzen auch die Notation $df(p, v) = (f(p), df_p(v))$, wobei wir schreiben $df_p : T_pM \to T_{f(p)}N$.

Andere Bezeichnungen für df sind f_*, f' oder Tf. Die Definition des Differentials ist unabhängig von den verwendeten Karten(Übung).

Beispiel 3.18. Betrachten wir eine Kurve $c : I \to M$ mit $0 \in I$. Weil das Interval I in $\mathbb{R}$ liegt, und wir $T_p\mathbb{R}$ mit $\mathbb{R}$ identizieren, können wir den Tangentialvektor $(0, v) := (0, 1) \in TI$ betrachten. Das differential bildet ihn ab auf $dc(0, 1) = (c(0), dc_0(1)) = (c(0), c'(0))$.

Das differential in einem Punkt ordnet folgendermaen Hauptteile einander zu:

$$\xi \mapsto \eta = d(y \circ f \circ x^{-1})_{x(p)}\xi = \xi^i \partial_i(y \circ f \circ x^{-1})(x(p)) =: \xi^i \frac{\partial f}{\partial x^i}.$$

Dabei haben wir mit dem letzten Ausdruck erneut eine Kurzschreibweise eingeführt, die die Formel auf Mannigfaltigkeiten mit ihrer euklidischen Version ubereinstimmen läßt.

Theorem 3.19. *(i) Das Differential $df_p : T_pM \to T_{f(p)}N$ ist eine lineare Abbildung.*
(ii) Es gilt die Kettenregel $d(f \circ g)_p = df_{g(p)} \circ dg_p$.

Proof. Die Linearitdirat ist klar. Wegen der euklidischen Kettenregel gilt, an den richtigen Stellen,

$$d(z \circ f \circ g \circ x^{-1}) = d(z \circ f \circ y^{-1} \circ y \circ g \circ x^{-1}) = d(z \circ f \circ y^{-1})d(y \circ g \circ x^{-1}),$$

so dass $d(f \circ g)_p$ tatsächlich durch $df_{g(p)}$, dg_p dargestellt wird. □

Beispiel 3.20. Für die bereits betrachtete Kurve $c : I \to M$ und $f \in C^\infty(M)$ gilt laut Kettenregel

$$\frac{d}{dt}(f \circ c)|_{t=0} := d(f \circ c)(0, 1) = df(c(0), c'(0)) = (f(c(0)), df_{c(0)}c'(0)) = (f(p), df_pv)$$

mit $v = c'(0)$. Wir haben so eine Formel erhalten, die die aus dem Euklidischen bekannte Formel der Richtungsableitung $\frac{d}{dt}(f \circ c) = dfv$ für $c'(0) = v$ verallgemeinert.

Definition 3.21. (i) Eine differenzierbare Abbildung $f : M \to N$ zwischen Mannigfaltigkeiten heißt *Submersion*, wenn das differential $df_p : T_pM \to T_{f(p)}N$ für alle $p \in M$ surjektiv ist.

(ii) Eine differenzierbare Abbildung $f : M \to N$ zwischen Mannigfaltigkeiten heißt *Immersion*, wenn das differential $df_p : T_pM \to T_{f(p)}N$ für alle $p \in M$ injektiv ist.

(iii) Eine injektive Immersion, die Homöomorphismus auf ihr Bild ist, nennt man auch *Einbettung*.

Ist speziell die Inklusion $i : M \subset N \in N$, $i(x) = x$, eine Einbettung, so heißt $M \subset N$ eine Untermannigfaltigkeit von N.

Beispiel 3.22. i) $e^{it} : \mathbb{R} \to \mathbb{S}$ ist eine Submersion.

ii) Eine Kurve $c : I \to M$ ist Immersion, wenn $dc_t = c'(t) \neq 0$ gilt. Die differenzierbaren Kurven in $\mathbb{R}^2$, $t \mapsto (t^2, t^3)$ und $t \mapsto (t^3; t^3)$ sind also keine Immersionen.

iii) $e^{it} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ ist Immersion, aber nicht Einbettung.

Theorem 3.23 (Umkehrsatz)**.** *Falls $f_p : T_M \to T_{f(p)}N$ ein Isomorphismus ist, dann gibt es offene Umgebungen U von p in M und V von $f(p)$ in N, so dass $f : U \to V$ ein Diffeomorphismus ist.*

Proof. Übung. □

Definition 3.24. Sei $f : M \to N$ eine differenzierbare Abbildung zwischen Mannigfaltigkeiten.Seien $m := \dim M$ und $n := \dim N$.

(i) f hat *Rang* r in $p \in M$ genau dann, wenn $d(y \circ f \circ x^{-1})_{x(p)}$ Rang r hat, wobei (x, U) eine Karte von M um p und (y, V) eine Karte von N um $f(p)$ ist. Die Definition hängt nicht von der Wahl der Karten ab. Es ist klar, dass $r \leq \min\{m, n\}$.

(ii) $q \in N$ heißt ein *regulärer Wert* von f, falls alle Punkte aus $f^{-1}(q)$ Rang n hat.

4. Untermannigfaltigkeit

Definition 4.1 (Untermannigfaltigkeit)**.** Sei N eine Mannigfaltigkeit der Dimension n. Eine Teilmenge $M \subset N$ heißt m-dimensionale *Untermannigfaltigkeit* von N, wenn es zu jedem $p \in M$ eine Karte $x : U \to U' \times U''$ von N um p gibt, wobei $U' \subset \mathbb{R}^m$ und $U'' \subset \mathbb{R}^{n-m}$ offen sind, so dass $x(U \cap M) = U' \times \{z_0\}$ ist für ein $z_0 \in U''$.

Dann ist M zusammen mit der Relativtopologie eine topologische Mannigfaltigkeit der Dimension m, und die Menge der Karten $x : U \cap M \to U' \cong U' \times \{z_0\}$ ist ein Atlas für M. Daher ist M kanonisch eine Mannigfaltigkeit.

Untermannigfaltigkeiten sind häufig in natürlicher Weise Niveauflächen glatter Abbildungen. Erinnert sei an die Sphäre. Umgekehrt sind Niveauflächen glatter Abbildungen Untermannigfaltigkeiten, wenn die Ableitung der gegebenen Abbildung in jedem Punkt der Niveafläche surjektiv ist.

Theorem 4.2. *Seien M und N Mannigfaltigkeiten und $f : M \to N$ eine glatte Abbildung. Seien $m := \dim M$ und $n := \dim N$.*

(1) Falls f in $p \in M$ Rang r hat, dann gibt es zu jeder Karte (y, V) um f(p) mit $y(f(p)) = 0$ eine Karte (x, U)um p mit $x(p) = 0$, so dass

$$(y \circ f \circ x^{-1})(u^1, \cdots, u^m) = (u^1, \cdots, u^r, \varphi^{r+1}(u), \cdots, \varphi^n(u))$$

nach eventueller Umnummerierung der Komponenten von y. Hierbei sind die φ^j, $r < j \le n$, geeignete glatte Funktionen auf $x(U)$.

(2) Falls f in einer Umgebung von p Rang r hat, dann gibt es Karten (x, U) um p mit $x(p) = 0$ und (y, V) um $f(p)$ mit $y(f(p)) = 0$, so dass

$$(y \circ f \circ x^{-1})(u^1, \cdots, u^m) = (u^1, \cdots, u^r, 0, \cdots, 0).$$

Proof. Sei (x, U) eine Karte um p mit $x(p) = 0$. Nach eventueller Umnummerierung der Komponenten von x und y können wir annehmen, dass

$$\left(\frac{\partial f^j}{\partial x^i}(p)\right)$$

invertierbar ist. Hierbei ist $f^j := y^j \circ f$. Für $1 \le j \le r$ setzen wir nun $\hat{x}^j = f^j$ und $\hat{x}^j = x^j$ sonst. Dann gilt

$$\left(\frac{\partial \hat{x}^j}{\partial x^i}(p)\right) = \begin{pmatrix} (\frac{\partial f^j}{\partial x^i})(p) & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

also hat $\hat{x} : U \cap f^{-1}(V) \to \mathbb{R}^m$ in p Rang m. Nach dem Umkehrsatz ist $\hat{x}$ ein lokaler Diffeomorphismus um p : Es gibt eine Umgebung $\hat{U}$ um p, so dass $\hat{x} : \hat{U} \to \hat{U}' = \hat{x}(\hat{U})$ eine Karte von M um p ist. Nach Definition von $\hat{x}$ gilt

$$(y \circ f \circ \hat{x}^{-1})(u^1, \cdots, u^m)) = (u^1, \cdots, u^r, \varphi^{r+1}(u), \cdots, \varphi^n(u))$$

mit gewissen glatten Funktionen φ^j auf $\hat{U}'$. Damit ist Behauptung (1) bewiesen.

Ferner ist

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ * & (\partial_i \varphi^j) \end{pmatrix}$$

die Jacobi-Matrix von $y \circ f \circ \hat{x}^{-1}$, wobei in der Untermatrix $(\partial_i \varphi^j)$ die Indizes über die Bereiche $r < i \le m$ und $r < j \le n$ laufen. Unter der Voraussetzung in (2) gilt daher

$$\partial_i \varphi^j = 0, \quad r < i \le m, r < j \le n$$

in einer Umgebung von $\hat{x}(p) = 0$. Wenn wir $\hat{U}$ eventuell noch verkleinern, können wir annehmen, dass $\hat{U}'$ von der Gestalt $(-\varepsilon, \varepsilon)^m$ ist und dass die partiellen Ableitungen $\partial_i \varphi^j = 0, \quad r < i \le m, r < j \le n$, auf $\hat{U}'$ verschwinden. Dann folgt

$$\varphi^j(u) = \psi^j(u^1, \cdots, u^r), \quad r < j \le m,$$

das heißt, die φ^j hängen nicht von $u^{r+1}, \cdots, u^m$ ab. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir nach (1) annehmen, dass $V' = y(V)$ von der Gestalt $(-\varepsilon, \varepsilon)^r \times (-\delta, \delta)^{m-r}$ ist. Wir setzen nun $\hat{y}^j = y^j$ für $1 \leq j \leq r$ und $\hat{y}^j = y^j - \psi^j(y^1, \cdots, y^r)$ sonst. Dann gilt

$$(\frac{\partial \hat{y}^j}{\partial y^i}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ * & 1 \end{pmatrix}$$

Nach dem Umkehrsatz ist $\hat{y}$ ein lokaler Diffeomorphismus um $f(p)$, also eine Karte von N auf einer offenen Umgebung $\hat{V}$ von $f(p)$. Nach Definition gilt

$$(y \circ f \circ x^{-1})(u^1, \cdots, u^m) = (u^1, \cdots, u^r, 0, \cdots, 0).$$

Damit folgt Behauptung (2). □

Korollar 4.3. *(1) Falls df_p surjektiv ist, so gibt es Karten x um p und y um $f(p)$ mit*

$$(y \circ f \circ x^{-1})(x^1, \cdots, x^m) = (x^1, \cdots, x^n).$$

Insbesondere ist die Niveau Fläche $f^{-1}(q)$ eine $(m-n)$-dimensionale Untermannigfaltigleit von M, falls q ein regulärer Wert von f ist.

(2) Falls df_p injektiv ist, so gibt es Karten x um p und y um $f(p)$ mit

$$(y \circ f \circ x^{-1})(x^1, \cdots, x^m) = (x^1, \cdots, x^m, 0, \cdots, 0).$$

Insbesondere gibt es eine offene Umgebung U um p, so dass f(U) eine Untermannigfaltigkeit der Dimension m von N ist und $f : U \to f(U)$ ein Diffeomorphismus.

Beispiel 4.4. Sei $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$ und $P = \{A \in \mathbb{K}^{n\times n} | A^t A = E_n\}$, wobei A^t die zu A transponiert-konjugierte Matrix bezeichnet. Die Menge dieser Matrizen ist aus der linearen Algebra bekannt, zumindest im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ heißt $P =: O(n)$ die orthogonale Gruppe, für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ heißt $P =: U(n)$ die unitäre Gruppe und für $\mathbb{K} = \mathbb{H}$ heisst $P =: Sp(n)$ die symplektische Gruppe, Alle drei bestehen aus invertierbaren Matrizen und sind, zusammen mit der Matrizenmultiplikation, Untergruppen der jeweiligen allgemeinen linearen Gruppe.

Wir identitzieren $\mathbb{K}^{n\times n}$ mit $\mathbb{R}^{rl}$, wobei $l = n^2$ und $r = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{K}$ ist. Sei $N = \{A \in \mathbb{K}^{n\times n} | A = A^t\}$. Dann ist N ein $\mathbb{R}$-Unterraum der Dimension $n + rn(n-1)/2$ über $\mathbb{R}$ und P ist Niveaufläche der glatten Abbildung

$$f : \mathbb{K}^{n\times n} = M \to N, \quad A \to A^t A.$$

Sei $B \in M$. Dann ist $((A + tB)^t (A + tB))'|_{t=0} = A^t B + B^t A$, daher

$$df_A(B) = A^t B + B^t A.$$

Damit folgt, für $A \in P$,

$$df_A(AC) = \begin{cases} 0, & \text{falls } C^t = -C, \\ 2C, & \text{falls } C^t = C. \end{cases}$$

Insbesondere ist df_A surjektiv für alle $A \in P$. Deshalb ist $P = O(n), U(n), Sp(n)$ eine Untermannigfaltigkeit von M. Die Dimension von P ist $(r-1)n + rn(n-1)/2$.

Korollar 4.5. *Falls f eine Einbettung ist, so ist $Q = f(M)$ eine Untermannigfaltigkeit von N und $f : M \to Q$ ein Diffeomorphismus.*

Korollar 4.6. *Falls f in einer Umgebung von p konstanten Rang hat, dann können wir f in einer Umgebung von p als Komposition $f = g \circ h$ schreiben, wobei g eine Einbettung und h eine Submersion ist.*

Proof. Seien $x : U \to U'$ und $y : V \to V'$ Karten um p und $f(p)$ wie in Behauptung (2) von Theorem 4.2. ObdA können wir annehmen $U' = (-\varepsilon, \varepsilon)^m$ und $V' = (-\varepsilon, \varepsilon)^n$. Sei nun $h : U \to (-\varepsilon, \varepsilon)^r$ die Komposition von x mit der Projektion

$$(-\varepsilon, \varepsilon)^m \to (-\varepsilon, \varepsilon)^r, \quad (x^1, \cdots, x^m) \to (x^1, \cdots, x^r),$$

ferner $g : (-\varepsilon, \varepsilon)^r \to V$ die Komposition der Inklusion

$$(-\varepsilon, \varepsilon)^r \to (-\varepsilon, \varepsilon)^n, \quad (x^1, \cdots, x^r) \to (x^1, \cdots, x^r, 0, \cdots, 0),$$

mit y^{-1}. Offensichtlich ist h eine Submersion, g eine Einbettung. $\square$

Korollar 4.7. *Falls f in einer Umgebung von $P = f^{-1}(q)$ Rang r hat, so ist P eine Untermannigfaltigkeit von M der Dimension $m - r$.*

Zum Abschluß noch eine Bemerkung zu Tangentialräumen von Untermannigfaltigkeiten. Sei $M \subset N$ eine Untermannigfaltigkeit, $i : M \to N$ die Inklusion. Für $p \in M$ ist dann T_pM kanonisch isomorph zu einem Unterraum von T_pN:

Falls M durch die (reguläre) Gleichung $f(p) = q$ definiert ist, so ist $T_pM = \ker df_p \subset T_pN$ bezüglich dieser Identikation.

Beispiele 4.8. (i) In Beispiel 4.4 gilt $T_AO(n) = \ker df_A = \{AC \mid C^t = -C\}$.

(ii) Sei $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ die Sphäre. Wir können sehen $\mathbb{S}^n$ als die Niveaufläche von $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = |x|^2 - 1$. Es ist klar, dass 0 ein regulärer Wert von f ist und $\mathbb{S}^n = f^{-1}(0)$ Untermannigfaltigkeit. Das Differential von f in x ist $df_x \cdot = \langle x, \cdot \rangle$. Daher ist $T_x\mathbb{S}^n = \ker df_x = \{\xi \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle x, \xi \rangle = 0\}$.

5. Vektorfelder

Wir werden alle grundlegenden Konzepte der Riemannschen Geometrie mit Hilfe von Vektorfeldern definieren. Genauso wie zu Tangentialvektoren eine Richtungsableitung gehört, so führen auch Vektorfelden ein Doppelleben als Vektoren im Tangentialraum und als Differentialoperatoren erster Ordnung.

Definition 5.1. Ein (differenzierbares) *Vektorfeld* X auf einer Mannigfaltigkeit M ist eine differenzierbare Abbildung

$$M \to TM, \quad p \mapsto (p, X) \in T_pM.$$

D.h., X ist eine glatte Abbildung von $M \to TM$ mit $\pi \circ X = id : M \to M$.

Die Menge der Vektorfelder auf M bezeichnen wir mit $\mathcal{V}(M)$.

Weil also jedem p genau ein X zugeordnet wird, schreiben wir auch $X(p)$ statt (p, X). Bezüglich einer Karte x schreiben wir den repr asentierenden Hauptteil des Vektorfeldes nun als eine Funktion $\xi : U \to \mathbb{R}^n$. Benutzen wir die Darstellung von (3), so ergibt dies

$$X(p) = \xi^i(p) \frac{\partial}{\partial x^i}(p).$$

Das Feld X ist differenzierbar genau dann, wenn für alle Karten sein Hauptteil $p \mapsto \xi(p)$ differenzierbar ist. (Übung)

Beispiele 5.2. i) Für die Mannigfaltigkeit $M = \mathbb{R}^n$ benutzen wir ausschlielich den Atlas $\{(id, \mathbb{R}^n)\}$. Dann ist es sinnvoll, den einzigen Repräsentanten $\xi(x)$ mit seinem Vektorfeld $X(x)$ zu identifizieren, das heißt wir unterscheiden in diesem Fall nicht zwischen Hauptteilen und Vektorfeldern.

ii) Für die Mannigfaltigkeit $M = \mathbb{S}^n$ können wir Tangentialvektoren mit Tangentialvektoren des $\mathbb{R}^{n+1}$ identifizieren: Ein Vektorfeld ist eine Abbildung in das orthogonale Komplement jeden Punktes,

$$\mathcal{V}(\mathbb{S}^n) = \{X : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^{n+1} : \langle X(p), p \rangle = 0, \forall p \in \mathbb{S}^n\}.$$

Ist die Dimension der Sphäre ungerade, *d.h.* $n + 1 = 2k$, so definieren wir durch 90-Grad Drehung von Koordinatenpaaren (bzw. Multiplikation mit i in $\mathbb{C}^k = \mathbb{R}^{2k}$) das Vektorfeld

$$V : \mathbb{S}^n \in \mathbb{R}^{n+1}, \quad p = (x_1, y_1, \cdot, x_k, y_k) \mapsto V(p) = (-y_1, x_1, \cdots, -y_k, x_k)$$

Es hat in $\mathbb{R}^{n+1}$ die konstante Länge 1, insbesondere verschwindet es nirgendwo. Andererseits hat jedes Vektorfeld auf einer geraddimensionalen Sphäre eine Nullstelle (Satz vom Igel).

iii) Auf $\mathbb{S}^3$ gibt es drei glatte Vektorfelder I, J und K, die in jedem Punkt der $\mathbb{S}^3$ linear unabhängig sind. Dazu identizieren wir $\mathbb{R}^4 = \mathbb{H}$ und setzen

$$I(x) = xi, \quad J(x) = xj, \quad K(x) = xk.$$

Definition 5.3 (Vektorfelder als Derivationen)**.** Die punktweise definierte Lie-Ableitung ergibt eine Lie-Ableitung für Vektorfelder:

$$\partial_X : C^\infty(M) \to C^\infty(M), \quad (\partial_X f)(p) := (\partial_{X(p)} f)(p) = \xi^i(p) \frac{\partial f}{\partial x^i}(p).$$

Definition unabhängig von der Karte ist, hatten wir bereits bestätigt.

Bemerkung 5.4. 1. $\partial_X : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ ist eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung, die die Produktregel erfüllt.

2. $\partial_X f(p)$ hängt nur von X in p ab, wenn auch von f in einer Umgebung von p.

3. Ist $X : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein Vektorfeld, so gilt für die Richtungsableitung: $df X = \partial_X f$. Entsprechendes behaupten wir für die Lie-Ableitung von skalaren Funktionen auf Mannigfaltigkeiten:

$$df X = \partial_X f \quad \text{für } X \in \mathcal{V}(M), f \in C^\infty(M).$$

Tatsächlich gilt nach Definition des Difierentials $df X = (f(p), [(id, \mathbb{R}), d(f \circ x^{-1})_{x(p)}\xi]) \in T\mathbb{R}$. Aber für die Bildmannigfaltigkeit $\mathbb{R}$ brauchen wir keine Karte und wir identizieren ohnehin $T\mathbb{R}$ mit $\mathbb{R}$. Daher ergibt sich $df X = d(f \circ x^{-1})_{x(p)}\xi$.

4. Oft werden wir benutzen: Für zwei Vektorfelder $X, Y \in \mathcal{V}(M)$ gilt

$$X = Y \iff \partial_X f = \partial_Y f \quad \text{gilt für alle } f \in C^\infty(M).$$

Es sei (x, U) eine Karte und $f^i \in C^\infty(U)$ definiert als i-te Koordinate des Kartenurbilds, $f^i(p) := (\pi^i \circ x)(p) = x^i(p)$. Dann gilt für p

$$\frac{\partial f^i}{\partial x^j}(p) = \partial_j (f^i \circ x^{-1})_{x(p)} = \partial_j \pi^i(x(p)) = \delta^i_j.$$

Für $X = \xi^j \frac{\partial}{x^j}$ folgt daraus $\partial_X f^i = \xi^i$. Gilt also $\partial_X f^i = \partial_Y f^i$ für alle $i = 1, \cdots, n$, so folgt bereits $X(p) = Y(p) \forall p \in U$.

Weil mit $f \in C^\infty(M)$ auch die Lie-Ableitung $\partial_X f = Xf \in C^\infty(M)$ ist, können wir Vektorfelder hintereinanderschalten. Dies ergibt eine zweite Richtungsableitung $(\partial_X \partial_Y)(f) = \partial_X(\partial_Y f) = X(Y(f)) \in C^\infty(M)$. Um den Differentialoperator $\partial_X \partial_Y$ bezüglich einer Karte x darzustellen, seien $X = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ und $Y = \eta^j \frac{\partial}{\partial x^j}$. Es folgt

$$X(Y(f)) = X(\eta^j \frac{\partial f}{\partial x^j}) = \xi^i (\frac{\partial \eta^j}{\partial x^i} \frac{\partial f}{\partial x^j} + \eta^j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x^j}).$$

Dies zeigt, dass $\partial_X \partial_Y$ ein Differentialoperator zweiter Ordnung ist, also keine Lie-Ableitung von f bzw. kein Vektorfeld. Erstaunlicherweise kann man daraus aber doch ein Vektorfeld gewinnen:

Lemma 5.5. *Seien X und Y Vektorfelder auf einer Mannigfaltigkeit M. Dann wird durch*

$$Zf := (XY - YX)f \quad \textit{für alle } f \in C^\infty(M)$$

ein Vektorfeld Z eindeutig bestimmt.

Proof. Es gilt lokal, bezüglich einer Karte (x, U):

$$Y(X(f)) = Y(\xi^j \frac{\partial f}{\partial x^j}) = \eta^i (\frac{\partial \xi^j}{\partial x^i} \frac{\partial f}{\partial x^j} + \xi^j \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}).$$

Da nach dem Schwarzschen Lemma zweite Ableitungen vertauschen, folgt

$$XYf - YXf = \left(\xi^i \frac{\partial \eta^j}{\partial x^i} - \eta^i \frac{\partial \xi^j}{\partial x^i} \right) \frac{\partial f}{\partial x^j}.$$

Betrachten wir nun auf $U \subset M$ das Vektorfeld Z mit Hauptteil

$$\chi^k := \left(\xi^i \frac{\partial \eta^j}{\partial x^i} - \eta^i \frac{\partial \xi^j}{\partial x^i} \right).$$

Wir können zeigen, dass $Z = [(x, U), \chi]$ ein Vektorfeld ist. (Übung) $\square$

Definition 5.6 (Lie-Klammer zweier Vektorfelder)**.** Das Vektorfeld $Z := [X, Y] := XY - YX$, heißt *Kommutator* oder *Lie-Klammer* von X und Y. Lokal, also bezüglich einer Karte (x, U), gilt

$$[X, Y] = \left(\xi^i \frac{\partial \eta^j}{\partial x^i} - \eta^i \frac{\partial \xi^j}{\partial x^i}\right) \frac{\partial}{\partial x^j}.$$

Beispiele 5.7. 1. Es gilt $[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}] = 0$ für jede Karte x (nachrechnen!). Insbesondere gilt das für $\mathbb{R}^n$.

2. Sei $M = \mathbb{R}^2$. Wir identizieren Tangentialvektoren mit Hauptteilen, und setzen

$$J(u, v) := (-v, u) = (\xi^1(u, v), \xi^2(u, v)) \quad e_1(u, v) := (1, 0) = (\eta^1(u, v), \eta^2(u, v)).$$

Dann sind die einzigen partiellen Ableitungen der Hauptteile ξ^i, η^i , die nicht verschwinden $\frac{\partial}{\partial v}\xi^1 = -1$, $\frac{\partial}{\partial u}\xi^2 = 1$. Es folgt $[J, e_1] = (-\eta^1 \frac{\partial}{\partial u}\xi^2)e_2 = -(0, 1)$.

Der Kommutator hat folgende Eigenschaften:

Theorem 5.8. *Für alle $X, Y, Z \in \mathcal{V}(M)$ gilt:*
(i) Antikommutativität $[X, Y] = -[Y, X]$
(ii) Linearität $[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z]$ für $a, b \in \mathbb{R}$,
(iii) Jacobi-Identität $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$,
(iv) $[fX, gY] = fg[X, Y] + f(Xg)Y - g(Yf)X$ für alle $f, g \in C^\infty(M)$

Proof. (Übung) □

Bemerkung 5.9. Sind allgemein ein Vektorraum $\mathfrak{g}$ und eine Verknüpfung $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ gegeben, die die Eigenschaften (i) bis (iii) des Satzes erfüllt, so nennt man $\mathfrak{g}$ eine Lie-Algebra. Der Raum der Vektorfelder $\mathcal{V}(M)$ auf einer Mannigfaltigkeit M bildet also eine unendlich-dimensionale Lie-Algebra. Ein Beispiel einer endlich-dimensionalen Lie-Algebra ist der Vektorraum der $(n \times n)$-Matrizen mit Kommutator $[A, B] := AB - BA$.

Definition 5.10. Sei $f : M \to N$ eine glatte Abbildung. Vektorfelder $X \in \mathcal{V}(M)$ und $Y \in \mathcal{V}(N)$ heißen *f-verwandt*, wenn

$$df_p(X_p) = Y_{f(p)}, \qquad \text{für alle } p \in M.$$

Beispiele 5.11. (i) Sei $i : M \subset N$ eine Untermannigfaltigkeit von die kanonische Inklusionsabbildung und Y ein Vektorfeld auf N mit $Y_p \in T_pM$ für alle $p \in M$. Dann sind die Einschränkung X von Y auf M und Y i-verwandt.

(ii) Sei $l_a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, x \mapsto x + a$ eine Translation für $a \in \mathbb{R}^n$. Alle Vektorfelder, die invariant unter aller Translationen sind (d.h., X ist l_a-verwandt zu X für alle $a \in \mathbb{R}^n$), sind $\xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ mit $\xi^i = const.$ für alle i.

Das folgende Lemma ist wichtig bei der Bestimmung von Lieschen Klammern.

Lemma 5.12. *Seien $X_1, X_2 \in \mathcal{V}(M)$ f-verwandt zu $Y_1, Y_2 \in \mathcal{V}(N)$. Dann ist $[X_1, X_2]$ f-verwandt zu $[Y_1, Y_2]$, d.h., für alle $p \in M$ gilt*

$$df_p([X_1, X_2]_p) = [Y_1, Y_2]_{f(p)}.$$

Proof. Sei $\varphi \in C^\infty(N)$. Dann ist

$$(Y_{i\,f(p)})(\varphi) = (f_{*p}(X_{ip})(\varphi) = (X_i(p))(\varphi \circ f)$$

nach Definition von f_*, also

$$(Y_i\varphi) \circ f = X_i(\varphi \circ f)$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}
[Y_1, Y_2]_{f(p)}(\varphi) &= (Y_1(f(p)))(Y_2\varphi) - (Y_2(f(p)))(Y_1\varphi) \\
&= (X_1(p))((Y_2\varphi) \circ f)) - (X_2(p))((Y_1\varphi) \circ f) \\
&= (X_1(p))(X_2(\varphi \circ f)) - (X_2(p))(X_1(\varphi \circ f)) \\
&= [X_1, X_2]_p(\varphi \circ f) \\
&= (df_p([X_1, X_2]_p))(\varphi).
\end{aligned}$$

Daher ist $[X_1, X_2]$ f-verwandt zu $[Y_1, Y_2]$ wie behauptet. □

Beispiel 5.13. Seien I, J, K die Vektorfelder auf $\mathbb{S}^3$ wie in Beispiel (iii) von 5.2. Wir betrachten $M = \mathbb{S}^3$ als Untermannigfaltigkeit in $N = \mathbb{R}^4 = \mathbb{H}$. Dann sind I, J, K bezüglich der Inklusion verwandt zu den Vektorfeldern selben Namens

$$I : x \mapsto xi, \quad J : x \mapsto xj, \quad K : x \mapsto xk$$

auf $\mathbb{H}$ (genaugenommen sind dies die Hauptteile bezdiruglich der Karte id auf $\mathbb{H} = \mathbb{R}^4$). Mit Lemma 5.12 folgt $[I, J]_x = xij - xji = 2xk = 2K(x)$.