6. Riemannsche Metrik

Definition 6.1. Eine semi-Riemannsche Metrik auf einer (differenzierbaren) Mannigfaltigkeit M^n ist eine Familie g von nicht-ausgearteten E symmetrischen Bilinearformen

$$g_p : T_pM \times TpM \to \mathbb{R}, \quad p \in M.$$

die in folgendem Sinne differenzierbar von p abhängen: Für je zwei differenzierbare Vektorfelder $X, Y \in \mathcal{V}(M)$ ist $p \mapsto g_p(X, Y)$ differenzierbar. Die Metrik heißt Riemannsch, wenn g_p positiv definit für alle $p \in M$ ist.

Man nennt (M, g) oder kurz $M = M^n$ Riemannsche bzw. semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit. In dieser Vorlesung betrachten wir nur den Riemannschen Mannigfaltigkeiten.

Die Differenzierbarkeitsvoraussetzung ist aquivalent dazu, dass bezüglich jeder Karte (x, U) die Funktionen

$$g_{ij} : U \to \mathbb{R}, \quad g_{ij}(p) := g_p \left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right), \quad 1 \leq i, j \leq n$$

differenzierbar sind. Dann erhält man für lokale Darstellungen $X = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ und $Y = \eta^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ den Ausdruck

$$g(X, Y) = \xi^i \eta^j g \left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^i} \right) = \xi^j \eta^j g_{ij}.$$

Beispiele 6.2. 1) Speziell ist R^n der Euklidische Raum mit $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$.

2. Klassische Flächen: Ist $f : M^n \in \mathbb{R}^m$ eine Immersion, so wird M Riemannsche Mannigfaltigkeit durch Zurückziehen der Metrik $g_p(X, Y) := \langle df_p X, df_p Y \rangle$. Ist speziell M eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$, so wird hierdurch eine neue Metrik erklärt, die sogenannte erste Fundamentalform der Immersion. Ein Spezialfall sind Graphen in $\mathbb{R}^{n+1}$, $F(u) = (u, f(u))$ für $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Erklären Sie die Riemannsche Metrik g_{ij} auf für diesen Fall!

3. Allgemein kann man für jede Immersion $f : M \to (N, h)$, aus einer Riemannschen Metrik h von N eine Riemannsche Metrik für M gewinnen: Durch $g_p(X, Y) := h_{f(p)}(df_p X, df_p Y)$ wird die *zurückgezogene (pullback) Metrik* $f^*h := g$ definiert.

4. Insbesondere ist die Sphäre $\mathbb{S}^m := \{x \in \mathbb{R}^{m+1} | \langle x, x \rangle = 1\}$ mit der vom Euklidischen Raum $(\mathbb{R}^{m+1}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ induzierten Metrik eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Ihre Metrik bezeichnen wir als die kanonische Metrik auf $\mathbb{S}^m$.

Eine traditionelle Notation für g,

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j.$$

Diese Notation kann man rigoros als Tensorprodukt von 1-Formen verstehen:

$$g_{ij} dx^i \otimes dx^j$$

oder auch $\frac{1}{2} g_{ij}(dx^i \otimes dx^j + dx^j \otimes dx^i)$, wobei (dx^i) die zu $e_i = \partial / \partial x^i$ duale Basis ist. Die Schreibweise wird besonders übersichtlich, wenn die Bezeichnung der Koordinaten eine Bedeutung trägt: Z.B. lautet die Metrik von $\mathbb{R}^2$ in kartesischen Koordinaten $ds^2 = dx^2 + dy^2$ und in Polarkoordinaten $ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2$. (Übung)

Beispiele 6.3. 1. (Konforme Änderung der Metrik). Ist g eine Riemannsche Metrik auf M und $\lambda : M \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion, so ist auch $e^{2\lambda} g$ eine Riemannsche Metrik auf M.

2. (Poincarémodell des hyperbolischen Raums). Auf der offenen Einheitskugel D^m im $\mathbb{R}^m$ erhält man durch spezielle konforme Änderung der Euklidischen Metrik eine neue Riemannsche Metrik

$$g_p(X, Y) := \frac{4}{(1 - \|p\|^2)^2} \langle X, Y \rangle.$$

(D^m, g) ist ein Modell für den m-dimensionalen hyperbolischen Raum H^m.

Theorem 6.4. *Auf jeder Mannigfaltigkeit (Hausdorff mit abzählbarer Basis der Topologie!) gibt es eine Riemannsche Metrik.*

Definition 6.5 (Teiling der Eins)**.** Eine (differenzierbare) Zerlegung der Eins (partition of unity) relativ zu einer Überdeckung $\{(U_\alpha, \alpha \in A)$ ist eine Familie $\{\eta_\alpha\}_{\alpha\in A}$ von Funktionen in $C^\infty(M)$ mit

(i) $f \geq 0$ und $\operatorname{supp} f_\alpha \subset \mathcal{U}_\alpha$,

(ii) $\forall p \in M$ gibt es eine Umgebung, die nur endlich viele $\operatorname{supp} f_\alpha$ trifft,

(iii) $\sum_{\alpha\in A} \eta_\alpha = 1$.

Bedingung (ii) ist sicher erfüllt, wenn die Überdeckung $\{U_\alpha\}$ lokal endlich ist. Wir benutzen die folgende Konsequenz aus dem 2. Abz ahlbarkeitsaxiom, die wir ohne Beweis angeben:

Theorem 6.6. *Auf jeder differenzierbaren Mannigfaltigkeit gibt es eine Zerlegung der Eins relativ zu einem Atlas.*

Beweis vom Theorem 6.4. Es seien X, Y im $\mathcal{V}(M)$ Vektorfelder mit lokalen Darstellungen $X(p) = \xi^i e_i$ und $Y(p) = \eta^i(p)e_i$ bezüglich der Karte $(x, U_\alpha) \in \mathcal{A}$ mit Standardbasis e_i. Auf $U_\alpha \subset M$ wählen wir die von der Standardmetrik induzierte Riemannsche Metrik

$$g_p^\alpha(X, Y) := \sum_{i=1}^m \xi^i(p)\eta^i(p)$$

und setzen sie durch 0 auf ganz M fort. Es sei nun $\{f_\alpha\}$ eine Zerlegung der Eins relativ zu einem Atlas (x, U_α). Dann ist

$$g := \sum \eta_\alpha g^\alpha$$

in jedem Punkt p eine endliche Summe, und g ist bilinear, symmetrisch, positiv definit, sowie differenzierbar abhängig vom Fußpunkt. □

Definition 6.7 (Isometrische Immersion, Isometrie)**.** Seien (M, g) und (N, h) zwei Riemannsche Mannigfaltigkeiten.

(i) Eine Abbildung $f : G \to M$ einer offenen Teilmenge $G \subset N$ heißt eine *isometrische Immersion*, wenn auf G $f^*g = h$, d.h. wenn für alle $p \in G$ und $v, w \in T_pN$

$$g_{f(p)}(d_pf(v), d_pf(w)) = h_p(v, w).$$

Beachten Sie, dass f dann wirklich eine Immersion ist.

(ii) Ein Diffeomorphismus $f : N \to M$ heißt eine Isometrie, wenn $f^*g = h$ gilt.

(iii) Ist (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, so ist

$$\operatorname{Iso}(M, g) := \{f : M \to M | f \text{ Isometrie}\}$$

bezüglich der Komposition eine Gruppe, die sogenannte Isometriegruppe von (M, g).

Beispiel 6.8. Jede Immersion $f : N \to M$ in eine Riemannsche Mannigfaltigkeit (M, g) ist eine isometrische Immersion, wenn man N mit der Metrik f^*g versieht.

Beispiel 6.9. Die stereographische Projektion p_S: $U_S = \mathbb{S}^m \backslash \{S\} \to \mathbb{R}^m$

$$p_S(x) = \frac{1}{1 + x_0}(x_1, \cdots, x_m)$$

lierfert eine Isometrie der Einheitsspäre ohne den Südpol mit der kanonischen Metrik auf den $\mathbb{R}^m$ mit der konform geänderten Metrik

$$g_p(v, w) := \frac{4}{(1 + |p|^2)^2}\langle v, w\rangle.$$

Lemma 6.10. *Sei M lokal kompakter Hausdorffraum mit abzählbarer Umgebungsbasis. Dann ist M parakompakt, und zwar gibt es zu jeder offener Überdeckung eine abzählbare, lokal endliche Verfeinerung mit relativkompakten Mengen.*

Proof. Schritt 1. Es gibt offen Mengen $G_1 \Subset G_2 \Subset \cdots$ mit

$$M = \cup_{k=1}^\infty G_k$$

($G_k \Subset G_{k+1}$ bedeutet $\overline{G_k} \subset G_{k+1}$ und kompakt.) Sei $\{U_i : i \in \mathbb{N}\}$ Umgebungsbasis von M. Dann bilden schon die U_i mit $\overline{U_i}$ eine Umgebungsbasis: Sei $\Omega \subset M$ offen. Zu $p \in \Omega$ wähle offene Umgebung V mit

$\overline{V}$ kompakt. Da $\Omega \cap V$ offen ist, gibt es ein $i \in I$ mit $p \in U_i \subset \Omega \cap V$. Also ist $\overline{U_i}$ kompakt. Wir können also annehmen, dass die U_i relativ kompakt sind. Definiere nun induktiv $G_k = U_1 \cup \cdots \cup U_{i_k}$, wobei $i_1 = 1$ und $i_k = \min\{i > i_{k-1} : \overline{G_{k-1}} \subset U_1 \cup \cdots \cup U_i\}$. Die G_k sind wie verlangt.

Schritt 2. Konstruktion der local-endlichen Verfernerung.

Sei $V_i \mid \lambda \in \Lambda$ offene Überdeckung von M. Die Menge $\overline{G_k} \backslash G_{k-1}$ ist konpakt Teilmenge von $G_{k+1} \backslash \overline{G_{k-2}}$ für $k \geq 3$, und $\{V_\lambda \cap G_{k+1} \backslash \overline{G_{k-2}}\}$ ist offene Überdeckung von $\overline{G_k} \backslash G_{k-1}$. Ebeso ist $\{V_\lambda \cap G_3\}$ ist offene Überdeckung von $\overline{G_2}$. Wähle aus jeder dieser Überdeckungen eine endlichene Teilüberdeckung. Das ist eine Verfernerung wie behauptet. □

Lemma 6.11. *Es gibt ein Funktion* $\chi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ *mit* $\chi = 1$ *auf* $[-1,1]^n$ *und* $\operatorname{supp} \chi \subset (-2,2)^n$.

Beweis von Theorem 6.4. Sei $\emptyset = G_0 \Subset G_1 \Subset \cdots$ die Ausschöpfung von Lemma 6.10. Für $p \in M$ sei $i_p \in \mathbb{N}_0$ maximal mit $p \notin \overline{G_{i_p}}$. Außerdem sei $\lambda_p \in \Lambda$ mit $p \in V_{\lambda_p}$ gewählt. Es gibt eine Karte $x_p : U_p \to x_p(U_p) \subset \mathbb{R}^n$ mit folgende Eigenschaften:

a) U_p ist enthalten in $V_{\lambda_p} \cap (G_{i_p+2} \backslash \overline{G_{i_p}})$

b) $x_p(U_p) \subset [-2,2]^n$ und $x_p(p) = 0$. Definiere $\eta_p \in C^\infty(M)$ durch

$$\eta_p = \begin{cases} \chi \circ x_p & \text{auf } U_p \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei χ ist die Funktion aus Lemma 6.11. Nach Konstruktion ist $\operatorname{supp} \eta_p \Subset U_p \subset V_{\lambda_p}$, und es gilt

$$\operatorname{supp} \eta_p \cap G_k \neq \emptyset \Rightarrow (G_{i_p+2} \backslash \overline{G_{i_p}}) \neq \emptyset \Rightarrow k \geq i_p + 1.$$

Sei nun $W_p = x_p^{-1}([-1,1]^n)$, also $\eta_p = 1$ auf W_p. Wähle für $i \in \mathbb{N}_0$ endliche viele Punkte $p_{i,\nu} \in \overline{G_{i+1}} \backslash G_i$, $1 \leq \nu \leq N_i$, so dass $\overline{G_{i+1}} \backslash G_i$ durch die Megen $W_{p_{i,\nu}}$ überdeckt wird. Wegen $p_{i,\nu} \notin G_i \supset \overline{G_{i-1}}$ gilt $i_{p,\nu} \geq i - 1$, also

$$\operatorname{supp} \eta_{p_{i,\nu}} \cap G_k \neq \emptyset \Rightarrow i \leq i_{p_{i,\nu}} + 1 \leq k.$$

Also sind die Träger $\operatorname{supp} \eta_{p_{i,\nu}}$ mit $i \in \mathbb{N}_0$, $1 \leq \nu \leq N_i$, lokal endlich. Definiere jetzt

$$\eta = \sum_{i \in \mathbb{N}_0} \sum_{1 \leq \nu \leq \mathbb{N}_i} \eta_{p_{i,\nu}}.$$

Die Funktion η ist wohldefiniert und positiv. Erhalte gewünschte Teiling der Eins

$$\chi_{i,\nu} = \frac{\eta_{p_{i,\nu}}}{\eta}.$$

□

7. Abstand, Länge, die kürzste Verbindung

Mit einer Riemannschen Metrik kann man Längen und Winkel von Tangentialvektoren messen. Damit kann man auch den Winkel zwischen sich schneidenen Kurven und durch Integration die Länge von Kurven messen:

Definition 7.1 (Kurvenlänge, Winkel)**.** (1) Die Länge von $X = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}(p) \in T_pM$ bzgl. g ist

$$\|X\|_g = \sqrt{g(X,X)} = \left(g_{ij}(p)\xi^i\xi^j\right)^{\frac{1}{2}}.$$

(2) Für eine Kurve $c : [a,b] \to M$ in einer Riemannschen Mannigfaltigkeit (M,g) definieren wir ihre Länge durch

$$L(c) := \int_a^b \|c'(t)\|dt = \int_a^b \sqrt{g_{c(t)}(c'(t),c'(t))}dt.$$

(3) Der Winkel zwischen $X, Y \in T_pM$ bzgl. g ist

$$\angle(X,Y) = \arccos \frac{g(X,Y)}{\|X\|_g\|X\|_g}.$$

Es ist klar, dass in der Definition C^1 statt C^∞ ausreichend ist und wie man den Längenbegriff ausdehnt auf (stetige) stückweise -C^1 -Kurven Es ist auch klar, dass isometrische Immersionen Längen und Winkel erhalten.

Lemma 7.2 (Parameterinvarianz der Kurvenlänge)**.** *Die Kurvenlänge ist invariant gegenüber Umparametrisierungen: Ist $c : [a,b] \to M$ eine Kurve in einer Riemannschen Mannigfaltigkeit und $\varphi : [\alpha,\beta] \to [a,b]$ eine bijektive C^1-Abbildung, so gilt*

$$L(c \circ \varphi) = L(c).$$

Beispiel 7.3. Im der Einheittssphäre betrachten wir die Kurve

$$\bar{c}(t) := (\cos t, \sin t, 0, \cdots, 0), \quad 0 \le t \le t_0$$

von $p = (1, 0, \cdots, 0)$ nach $q = (\cos t_0, \sin t_0, 0, \cdots, 0)$. Ihre Länge ist

$$L(\bar{c}) = \int_0^{t_0} \sqrt{\sin^2 t + \cos^2} dt = t_0 = \cos^{-1} q_0 = \cos^{-1}(\langle p, q\rangle).$$

Theorem 7.4. *Punkten p und q in $\mathbb{S}^m$ haben eine Verbidungskurve der Länge $\cos^{-1}(\langle p, q\rangle)$, die kürzeste ist.*

Proof. OBdA können wir annehmen, dass im $\mathbb{S}^m$ $p = (1, 0, \cdots, 0), \quad q = (q_0, q_1, 0, \cdots 0)$.

Wir betrachten die Abbildung $\pi : \mathbb{R}^{m+1} \to \mathbb{R}^{m+1}$ mit

$$\pi(x_0, x) = (x_0, \sqrt{1 - x_0^2}, 0 \cdots, 0).$$

Es ist klas, dass $\pi(\mathbb{S}^m) \subset \mathbb{S}^m$.

Die Abbildung $\pi_{|\mathbb{S}^m}$ ist stetig und im Komplement von p differenzierbar. Für $(x_0, x) \in \mathbb{S}^m$ mit $x_0 > 1$ und $V = (v_0, v) \in T_{(x_0,x)}\mathbb{S}^m$, d.h.

$$x_0v_0 + \langle x, v\rangle = 0,$$

erhalten wir

$$d\pi_{(x_0,x)}(v_0, v) = (v_0, \frac{x_0v_0}{\sqrt{1 - x_0^2}}, 0, \cdots, 0)$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \|d\pi_{(x_0,x)}(v_0, v)\|^2 &= v_0^2 + \frac{x_0^2v_0^2}{1 - x_0^2} = v_0^2 + \frac{x_0^2v_0^2}{|x|^2} \\ &= v_0^2 + x_0\frac{\langle x, v\rangle^2}{|x|^2} \le v_0^2 + |x|^2 = \|(x_0, x)\|^2. \end{aligned}$$

D.h., die Abbildung kontrahiert also die Längen von Tangentialvektoren und damit die Länge von Kurven.

Ist also $c : [0, t_0] \to \mathbb{S}^m$ eine Kurve von p nach q , so ist wegen der Voraussetzungen an p und q auch $\pi \circ c$ eine Kurve von p nach q und

$$L(c) \geq L(\pi \circ c).$$

Es gilt

$$\begin{aligned} L(\pi \circ c) &= \int_0^{t_0} \sqrt{c_0'(t)^2 + \left(\frac{c_0 c_0'}{\sqrt{1 - c_0}}\right)^2} = \int_0^{t_0} \frac{|c_0'|}{\sqrt{1 - c_0^2}} \\ &\geq \int_0^{t_0} \frac{c_0'}{\sqrt{1 - c_0^2}} = \int_0^{q_0} \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}} = \cos^{-1} q_0 = L(\bar{c}) \end{aligned}$$

□

Definition 7.5 (Riemannscher Abstand)**.** Der Riemannsche Abstand von p und q ist

$$d(p, q) := \inf_{\gamma} L(\gamma),$$

wobei das Infimum über alle stückweisen C^1-Kurven mit $\gamma(0) = p$ und $\gamma(1) = q$ gebildet wird.

Lemma 7.6. *Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Dann ist (M, d) ein metrischer Raum. Weiter ist die durch d induzierte Topologie die gegebene Topologie.*

Bemerkung 7.7. Sei M eine Mannigfaltigkeit. M ist zusammenhängend genau dann, wenn je zwei Punkte $p, q \in M$ stückweise C^1-verbindbar: Sei M_p die Menge aller $q \in M$, die mit p durch eine stückweise C^1-Kurve verbindbar sind. Für $q \in M$ wähle man eine Karte (x, U) mit $x(U) = B_r(0)$ ein Ball mit Raduis r. Dann kann man zeigen, dass M_p offen und abgeschlossen ist.

Beweis vom Lemma 7.6.
(i) $d(p, q) = d(q, p)$ ist klar:
(iii) ist auch klar: Dreiecksungleichung: Seien $p, q, r \in M$ und sei $\varepsilon > 0$. Zeige, dass

$$d(p, q) \leq d(p, r) + d(r, q)$$

gilt: Sei γ_1 eine Kurve von p nach r mit $L(\gamma_1) \leq d(p, r) + \varepsilon$ und sei γ_2 eine Kurve von r nach q mit $L(\gamma_2) \leq d(r, q) + \varepsilon$. Dann ist

$$\gamma(t) := \begin{cases} \gamma_1(2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ \gamma_2(2t - 1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

eine stückweise C^1-Kurve von p über r nach q und es gilt

$$L(\gamma) = L(\gamma_1) + L(\gamma_2) \leq d(p, r) + \varepsilon + d(r, q) + \varepsilon.$$

Wir betrachten nun das Infimum über alle Kurven γ, die p mit q (nicht notwendigerweise über r) verbinden. Es folgt

$$d(p, q) \leq d(p, r) + d(r, q) + 2\varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt die Behauptung.

(ii) Zu $p \in M$ wähle wir eine Karte (x, U) mit $x(p) = 0$. Sei $\rho > 0$ mit $\overline{B_\rho(0)} \in x(U)$. Wegen Stetigkeit und Kompaktheit gilt

$$\begin{aligned} \lambda &= \inf_{|x| \leq \rho, |v| = 1} \left(g_{ij}(x) v^i v^j\right)^{\frac{1}{2}} > 0 \\ \Lambda &= \sup_{|x| \leq \rho, |v| = 1} \left(g_{ij}(x) v^i v^j\right)^{\frac{1}{2}} < \infty. \end{aligned} \tag{7.1}$$

Sei $\gamma : [a, b] \to B_\rho(0)$. Wir wollen die Länge von Kurven $c = x^{-1} \circ \gamma : [a, b] \to M$ vergleichen mit der Euklidischen Länge von γ. Nach Definition der Riemannschen Metrik gilt

$$g(c'(t), c'(t)) = g_{ij}(c(t)) \gamma'^i \gamma'^j.$$

Aus (7.1) folgt

$$\lambda |\gamma'(t)| \leq g(c'(t), c'(t)) \leq \Lambda |\gamma'(t)|.$$

Dann haben wir die folgende Abschätzung

$$\lambda \int_a^b |\gamma'| dt \leq L_g(x^{-1} \circ \gamma) \leq \Lambda \int_a^b |\gamma'| dt.$$

Sei $q = x^{-1}(u)$ mit $u \in B_\rho(=)$. Mit $\gamma(t) = tu, t \in [0,1]$, folgt

$$d(p,q) \leq L_g(x^{-1} \circ \gamma) \leq \Lambda \int_a^b |\gamma'| dt \leq \Lambda\rho.$$

Daraus folgt dass $x^{-1}(B_\rho(0)) \subset B^d_{\Lambda\rho}(p)$, wobei $B^d_r(p)$ der Ball um p mit Raduis r bzgl. der Metrik d. Sei andererseits $c : [a,b] \to M$ stückweise C^1 mit $c(a) = p$ und $c(b) \notin x^{-1}(B_\rho(0))$. Mit $\tau := \inf\{t \,|\, c(t) \notin x^{-1}(B_\rho(0))\}$ folgt die Abschätzung

$$L_g(c) \geq L_g(c_{|[a,\tau]}) \geq \lambda \int_a^\tau |(x \circ c)'| dt \geq \lambda\rho.$$

Insgesamt folgt

$$B^d_{\lambda\rho}(p) \subset x^{-1}(B_\rho(0)) \subset B^d_{\Lambda\rho}(p). \tag{7.2}$$

Ist $q \neq p$. Da M Hausdorffsch ist, können wir annehmen $q \notin x^{-1}(B_\rho(0))$ für ein $\rho > 0$. Daraus folgt $d(p,q) \geq \lambda\rho > 0$.

Die letzte Aussage folgt aus (7.2). □

Wir wollen eine kürzste Verbindung von p uns q durch Minimieren der Bogenlänge konstruiren (direkte Methode der Variationsrechnung). Allerdings ist es unklar, ob der Grenzwert einer Minimalfolge γ_k wieder stückweise C^1 ist. Um das zu umgehen, wollen wir die Bogenlänge auf einer größen Klasse definieren.

Definition 7.8. Sei $\gamma : [a,b] \to (M,g)$ stetig.

(1) Für einer Zerlegung Z: $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = b$ sei

$$L_{g,Z} = \sum_{i=1}^N d(\gamma(t_i), \gamma(t_{i-1})).$$

(2) Die g-Länge von γ ist $L_g(\gamma) = \sup_Z L_{g,Z}(\gamma)$. Ist $L_g(\gamma) \leq \infty$, so heißt γ rektifizierbar.