Theorem 7.9. *Für $\gamma \in C^0([a,b],M)$ stückweise C^1 gilt*

$$L_g(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'\|_g dt.$$

Proof. OBdA können wir annehmen, dass $\gamma \in C^1([a,b]),M)$. Für eine Zerlegung Z gilt

$$\sum_{i=1}^N d((\gamma(t_i),\gamma(t_{i-1})) \leq \sum_{i=1}^N \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\gamma'(t)\|_g dt = \int_a^b \|\gamma'(t)\|_g dt.$$

Durch Bilden des Supremums folgt

$$L_g(\gamma) \leq \int_a^b \|\gamma'(t)\|_g dt.$$

Sei $l_g(t) := L_g(\gamma_{|[a,t]})$ die Bogenlängefunktion. Für $t_1 < t_2$ haben wir die Ungleichung

$$\frac{d(\gamma(t_1),\gamma(t_2))}{t_2 - t_1} \leq \frac{l_g(t_2) - l_g(t_1)}{t_2 - t_1} \leq \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\gamma'(t)\|_g dt. \tag{7.3}$$

Für die linke Ungleichung haben wir $L_g(\gamma) = L_g(\gamma_{|[a,b]}) + L_g(\gamma_{|[b,c]})$ verwenden. Daraus folgt

$$\limsup_{t_2 \searrow t_1} \frac{d(\gamma(t_1),\gamma(t_2))}{t_2 - t_1} \leq \|\gamma'(t)\|_g.$$

Wir wollen nun zeigen, dass

$$\liminf_{t_2 \searrow t_1} \frac{d(\gamma(t_1),\gamma(t_2))}{t_2 - t_1} \geq \|\gamma'(t)\|_g.$$

Dann aus (7.3) folgt $l_g'(t) = \|\gamma'(t)\|_g$ und also die Behauptung. Sei $p = \gamma(t_1)$. Wähle eine Karte (x,U) mit

$$x(p) = 0, \quad \text{und} \quad g_{ij}(p) = \delta_{ij}.$$

Setze $\rho = |(x \circ \gamma)(t_2)| > 0$. Wähle wir t_2 nahe bei t_1, so gilt die Abschätzung der Metrik in (7.1) mit $\lambda = 1 - \varepsilon$. Da $\gamma(t_2) \notin x^{-1}(B_\rho(0))$, folgt

$$d(\gamma(t_1),\gamma(t_2)) \geq (1-\varepsilon)|(x\circ\gamma)(t_2) - (x\circ\gamma)(t_1)|.$$

Division durch $t_2 - t_1$ und Grenzübergang ergibt

$$\begin{aligned}
\liminf_{t_2 \searrow t_1} \frac{d(\gamma(t_1),\gamma(t_2))}{t_2 - t_1} &\geq (1-\varepsilon) \liminf_{t_2 \searrow t_1} \left| \frac{(x\circ\gamma)(t_2) - (x\circ\gamma)(t_1)}{t_2 - t_1} \right| \\
&= (1-\varepsilon)|(x\circ\gamma)'(t_1)| \\
&= (1-\varepsilon)\|\gamma'(t_1)\|_g.
\end{aligned}$$

Mit $\varepsilon \searrow 0$ folgt die Behauptung. □

Bemerkung 7.10. a) Vergrößert man bei einem Variationsproblem die Klasse, so kann im allgemeinen das Infimum echt kleiner werden

b) Sei $\gamma \in C^0([a,b],M)$ mit Bogenlägnenfunktion

$$l(t) = L_g(t) = L_g(\gamma_{|[a,t]}).$$

Die Funktion $l(t)$ ist monoton wechsende und stetig.

Theorem 7.11 (Unterhalbstetigkeit der Bogenlänge)**.** *Seien $\gamma_k, \gamma \in C^0([a,b]),M)$ und $\gamma_k \to \gamma$ punktweise aud $[a,b]$. Dann gilt*

$$L_g(\gamma) \leq \liminf_{k\to\infty} L_g(\gamma_k).$$

Proof. Sei $Z : a = t_0 \leq \cdots \leq t_N = b$ eine Zerlegung von $[a, b]$. Dann folgt aus der Stetigkeit von $d(\cdot, \cdot)$

$$\begin{aligned} L_{g,Z}(\gamma) &= \sum_{i=1}^{N} d(\gamma(t_i), \gamma(t_{i-1})) \\ &= \sum_{i=1}^{N} \lim_{k\to\infty} d(\gamma_k(t_i), \gamma_k(t_{i-1})) \\ &\leq \liminf_{k\to\infty} L_g(\gamma_k). \end{aligned}$$

Die Behauptung folgt mit Supremum über alle Zerlegung Z.

□

Nun betrachten wir eine Minimalfolge und suchen eine Teilfolge, die (zumindest) punktweise gegen eine stetige Kurve von p und q konvergiert. Im Allgemein haben wir das Problem der Umparametrisierung, die die Konvergenz kaputt machon können: Ist z.B. $\gamma : [0, 1] \to M$ Kürzeste von p nach q, $p \neq q$, so konvergiert

$$\gamma_k(t) := \gamma(t^k) \to \begin{cases} p, & \text{für } t \in [0, 1), \\ q, & t = 1 \end{cases}.$$

Um das zu verhindern, brauchen wir eine Normierung.

Theorem 7.12 (Umparametrisierung nach Bogenlänge)**.** *Sei $\gamma : [a, b] \to (M, g)$ stetig mit $L := L_g(\gamma) < \infty$. Setze $l(t) = L(\gamma_{|[a,t]})$ und definiere*

$$\tau(s) = \{t \in [a, b] \,|\, l(t) = s\}, \qquad \textit{für } s \in [0, L].$$

Dann ist

$$\tilde{\gamma}(s) := \gamma(\tau(s))$$

wohldefiniert und stetig, mit

$$L_g(\tilde{\gamma}_{|[s_1,s_2]}) = |s_1 - s_2|$$

Außerdem hat $\tilde{\gamma}$ dieselben Endpunkte wie γ.

Proof. Die Längefunktion $l(t)$ ist stetig mit $l(a) = 0$ und $l(b) = L$. Nach dem Zwischenwertsatz gilt $\emptyset \neq \tau(s) \subset [a, b]$ für alle $s \in [0, L]$. Da $l(t)$ monoton wachsend, gilt für $s_1 < s_2$

$$t_1 \in \tau(s_1), t_2 \in \tau(s_2) \Rightarrow t_1 < t_2.$$

In diesem Sinn ist τ monoton wachsend. Ist nun $t_k \in \tau(s_k)$ für $k = 1, 2$, so

$$d(\gamma(t_1), \gamma(t_2)) \leq L(\gamma_{|[t_1,t_2]}) = |l(t_1) - l(t_2)| = |s_1 - s_2|.$$

Insbesondere ist $\tilde{\gamma}(s) = \gamma(\tau(s))$ wohldefiniert, und $d(\tilde{\gamma}(s_1), \tilde{\gamma}(s_2)) \leq |s_1 - s_2|$, also Lipschitz. Nun gilt für Zerlegung $s_i = l(t_i) \Longleftrightarrow t_i \in \tau(s_i)$ von $[a, b]$

$$\sum_{i=1}^{N} d(\tilde{\gamma}(s_i), \tilde{\gamma}(s_{i-1})) = \sum_{i=1}^{N} d(\gamma(t_i), \gamma(t_{i-1})).$$

Durch Bildung des Supremums folgt $L_g(\tilde{\gamma}) = L_g(\gamma)$. Dasselbe Argument gilt auch auf Teilintervallen.

□

Für die Wahl der konvergenten Teilfolge brauchen wir nun einen allgemeinen Resultat.

Theorem 7.13 (Arzela-Ascoli)**.** *Seien $f_k : (X, d) \to (Y, \tilde{d})$, $k \in \mathbb{N}$, wobei X kompakt ist. Folgende Voraussetzungen seien gegeben:*

(i) f_k sind gleichmägßig beschränkt: $f_k(x) \subset B_R(y_0)$ für alle $k \in \mathbb{N}$.
(ii) f_k sind gleichgradig stetig: $\sup_{k\in\mathbb{N}} \sup_{d(x,x')<\delta} \tilde{d}(f_k(x), f_k(x')) \to 0$ *mit* $\delta \searrow 0$.
(iii) Für alle $x \in X$ hat $(f_k(x))_{k\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge.

Dann gilt $f_k \to f \in C^0(X, Y)$ gleichmäßig nach Wahl einer Teilfolge.

Sei nun M zusammenhängend, n-dimensionale Mannigfaltigkeit und g Riemannsche Metrik der Kalsse C^0 auf M. Für $p, q \in M$, $p \neq q$, betrachten

$$L = \inf\{L_g(\gamma) \mid \gamma \in C^0([0.1], M), \gamma(0) = p, \gamma(1) = q\} \in (0, \infty).$$

Wir wähleneine Minimalforlge γ_k, also

$$L_k = L_g(\gamma_k) \to L, \quad \gamma(0) = p, \gamma(1) = q.$$

Nach Satz 7.12 können wir γ_k proportional zur Bogenlänge parametrisieren, aslo

$$L(\gamma_{k|[s_1,s_2]}) = L_k|s_1 - s_2| \quad \text{für } [s_1, s_2] \subset [0, 1].$$

Wir prüfen nun die Bedingungen der Satzes von Arzela-Ascoli, wobei hier $\gamma_k : [0, 1] \to (M, d)$ mit $d(\cdot, \cdot)$ Riemannscher Abstand.

(1) Für $s \in [0, 1]$ gilt

$$\begin{aligned} d(p, \gamma_k(s)) &= d(\gamma_k(0), \gamma_k(s)) \\ &\leq L_g(\gamma_{k|[0,s]}) \leq L_g(\gamma_{k)} \\ &\leq L + 1 \end{aligned}$$

Also gilt $\gamma_k([0, 1]) \subset \overline{B_{L+1}(p)}$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

(2) Für $|s_1 - s_2| \leq \delta$ gilt

$$d(\gamma_k(s_1), \gamma_k(s_2)) \leq L(\gamma_{k|[s_1,s_2]}) = L_k|s_1 - s_2| \leq (L + 1)|s_1 - s_2|$$

Also ist γ_k gleichgradig stetig.

(3) Diese Bedingung ist nicht notwendig erfüllt, betrachte zum Beispiel Minimalfolge γ_k in $\mathbb{R}^n\backslash\{0\} =: M$ von p nach $q = -p$. Es ist klar, dass γ_k keine Teilfolge hat, die gegen eine stetige Kurve in M konvergiert. Es gibt hier $s \in [0, 1]$ mit $\gamma_k(s) \to 0 \notin M$. Zu diesen Punkt müssen wir die Voraussetzungen ergänzen.

Theorem 7.14. *Sei M eine n-dim. zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit . Die Abstandkugeln $B_\rho(p) = \{q \in M \mid d(p, q) < \rho\}$ sein relative kompakt. Dann ist*

$$L := \inf\{L_g(\gamma) \mid \gamma \in C^0([0.1], M), \gamma(0) = p, \gamma(1) = q\} \in (0, \infty) < \infty,$$

und das Infimum wird durch eine Kurve γ angenommen.

Proof. Wir hatten bereits gesehen, dass p, q durch eine sückweise C^1-Kurve verbindbar sind, also ist das Infimum endlichen. Nun wähle eine Minialfolge $\gamma_k \in C^0([0, 1], M)$, so dass die γ_k proportioniert zur der Bogenlänge parametrisiert sind. Dann sind die Bedingenen (1), (2) des Satzes von Arzela-Ascoli erfüllt, und (3) ist nach Voraussetzung gültig. Nach übergang zur eine Teilfolge, folgt

$$\gamma_k \to \gamma \text{ gleichmäßig mit } k \to \infty,$$

für $\gamma \in C^0([0, 1], M)$ mit $\gamma(0) = p, \gamma(1) = q$. Nach Satz 7.11 ist

$$L \leq L_g(\gamma) \leq \liminf_{k\to\infty} L_g(\gamma_k) = L.$$

□

Bemerkung 7.15. Der Beweis ist in folgende Aspekte typisch für die (geometrische) Variationsrechnung:

(i) es wird die Unterhalbstetigkeit benutzt.
(ii) es wird eine spezielle Parametrisierung benutzt, um die geometrische Invarianz auszuschätzen.
(iii) die Klasse der Funktionen (Kurvenm Flächen, $\cdots$) wird vergrößert, um Kompaktheit zu erhalten.
(iv) es stellt sich die Frage nach der Regularität der Minimierer.

Theorem 7.16 (Regularitätssatz)**.** *Sei g Riemannsche Metrik der Klasse C^k auf M für ein $k \geq 2$. Sei $\gamma : [0, L] \to M$ nach der Bogenlänge parametrisierte Kürzeste von p nach q. Ist $\gamma \in C^2([0, L] \in M)$, so ist γ von der Klasse C^{k+1}.*

Proof. Da die Regularität eine lokale Eugenschaft ist, können wir $M = U \subset \mathbb{R}^n$ annehmen und $g_{ij} \in C^k(U)$.

Schritt 1. Herleitung der Euler-Lagrange Gleichung (in den schwachen Sinn). Sei $\varphi \in C_c^1([0,1], \mathbb{R}^n)$. Dann für $|\varepsilon|$ klein, gilt

$$L_g(\gamma) \leq L_g(\gamma + \varepsilon\varphi),$$

und es folgt mit Satz 7.9

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{d\varepsilon}_{|\varepsilon=0} \int_0^L \|(\gamma + \varepsilon\varphi)'\|_g dt \\ &= \frac{d}{d\varepsilon}_{|\varepsilon=0} \int_0^L \sqrt{(g_{ij}(\gamma + \varepsilon\varphi)((\gamma^i + \varepsilon\varphi^i)', (\gamma^j + \varepsilon\varphi^j)')} dt \\ &= \int_0^L \left(g_{ij}(\gamma)\dot\gamma^i \dot\varphi^j + \frac{1}{2}\partial_l g_{ij}(\gamma)\varphi^l \dot\gamma^i \dot\gamma^j \right) dt, \end{aligned}$$

wobei $\dot\gamma = \gamma'$. Mit partieller Integration und die Fundamentallemma der Variationsrechnung folgt die Gleichung

$$\frac{d}{dt}(g_{il}(\gamma)\dot\gamma^i) = \frac{1}{2}\partial_l g_{ij}(\gamma)\dot\gamma^i\dot\gamma^j \quad \text{für } l = 1, 2 \cdots, n. \tag{7.4}$$

Schritt 2. Sei $g_{ij} \in C^k(U)$ mit $k \geq 2$, und induktiv schon $\gamma \in C^k([0,1], U)$. Der Fall $k = 2$ ist der Induktionanfang. Aus (7.4) folgt

$$g_{il}(\gamma)\dot\gamma^i =: f_l \in C^k([0,1]) \quad \text{für } l = 1, 2 \cdots, n.$$

Multiplizieren mit $g^{jl}(\gamma)$, summiere über l:

$$\dot\gamma^j = g^{jl}(\gamma) f_l \in C^k([0,1]),$$

also ist $\gamma \in C^{k+1}([0,1], M)$. Ist $g \in \mathbb{C}^\infty$, so such γ.

□

Hier ist (g^{ij}) die inverse Matrik von (g_{ij}). (7.4) ist die Gleichung der Geodätischen.

Wir knnen Gleichung (7.4) umformen: Aus (7.4) folgt zunächst

$$g_{il}\ddot\gamma^i + \partial_j g_{il}\dot\gamma^j\dot\gamma^i = \frac{1}{2}\partial_l g_{ij}(\gamma)\dot\gamma^i\dot\gamma^j \quad \text{für } l = 1, 2 \cdots, n.$$

Multiplikation von g^{lk} und summieren über l lieferen

$$\begin{aligned} \ddot\gamma^k &= -\frac{1}{2} g^{kl} \left(2\partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij}\right) \gamma^j \dot\gamma^i \\ &= -\frac{1}{2} g^{kl} \left(\partial_j g_{il} + \partial_j g_{lj} - \partial_l g_{ij}\right) \gamma^j \dot\gamma^i, \end{aligned}$$

denn die rechte Seite ist symmetrisch in i, j. Mit

$$\Gamma^k_{ij} := \frac{1}{2} g^{kl} \left(\partial_j g_{il} + \partial_j g_{lj} - \partial_l g_{ij}\right),$$

erhalten wir die Gleichung der Geodätischen

$$\ddot\gamma^k = -\Gamma^k_{ij}\dot\gamma^i\dot\gamma^j, \quad \forall k = 1, 2, \cdots, n. \tag{7.5}$$

Die Γ^k_{ij} heißen die Christoff-Symbole und spielen eine wesentliche Rolle in dem Livi-Civita-Zusammenhang.

Lemma 7.17. *Sei $\gamma : [a,b] \to U \subset M$ eine Lösung von (7.5). Dann ist γ proportional zur Bogenlänge parametrisiert, d.h. $\dot\gamma$ konstant ist.*

Proof. Übung.

□

8. Vektorbündel

Das Tangentialbuündel hat jedem Punkt $p \in M$ glatt einen Vektorraum, T_pM zugeordnet. Dabei waren die Vektorfelder $\mathcal{V}(M) = \{X : M \to TM : |X(p) \in T_pM, \forall p \in M\}$ von besonderer Bedeutung. Dieses Konzept wollen wir nun verallgemeinern.

Definition 8.1 (Vektorbündel)**.** Eine Mannigfaltigkeit V^{n+r} heißt Vektorbuñdel vom Rang r über einer Mannigfaltigkeit M^m, falls

1. eine surjektive Submersion $\pi : V \to M$, die sogenannte Bündelprojektion existiert und die Bündelfaser $\pi^{-1}(p) =: V_p$ eine Vektorraumstruktur der Dimension r besitzt. Insbesondere gilt $V = \cup_{p\in M} V_p$.

2. V in dem Sinn lokal über M trivialisiert, dass für jeden Punkt $p \in M$ eine trivialisierende Umgebung $U \subset M$ und ein Diffeomorphismus, eine sogenannte Bündelkarte oder Bündeltrivialisierung $\Phi : V_{|U} := \pi^{-1}(U) \to U \times V$ mit $V \cong \mathbb{R}^r$ existiert so, dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U) \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "\pi"'] & U \times \mathbb{R}^r \arrow[dl, "pr_1"] \\ U & \end{tikzcd}$$

kommutiert (d.h. $\pi = pr_1 \circ \Phi$) und $\Phi_p := \Phi_{V_p} : V_p \to \{p\} \times \mathbb{R}^r$ ein Vektorraumisomorphismus ist. Hierbei ist $pr_1 : U \times E \to U$ die Projektion $(x, v) \mapsto x$.

Wir schreiben kurz $\pi : V \to M$ ein Vektorbündel vom Rang r über der m-dimensionalen Mannigfaltigkeit M mit der Bündelprojektion π. Wir nennen V den Totalraum, M die Basis (base auf Englisch) und $V_p = \pi^{-1}(\{p\})$ die Faser (fiber) von p.

Definition 8.2 (Schnitt)**.** Ein C^∞-Schnitt vom Vektorbündel $\pi : V \to M$ ist eine Abbildung $v \in C^\infty(M, V)$ mit $\pi\circ = id$, also $v(p) \in V_p$ für $p \in M$.

Definition 8.3. Das Vektorbündel heißt *trivial*, wenn es eine Diffeomorphismus $\Phi : V \to M \times \mathbb{R}^r$ gibt, so dass $\Psi = \Phi^{-1}$ gegeben ist durch $\Psi(p, a) = \sum_{i=1}^r a_i v_i(p)$ für Schnitte $v_i \in C^\infty(M, V)$. Für jedes p bilden die v_i dann eine Basis von V_p.

Beispiele 8.4. 1. Jeder Vektorraum ist ein Vektorbündel über einer 0-dimensionalen zusammenhängenden Mannigfaltigkeit.

2. Für eine Mannigfaltigkeit M^n ist TM ein reelles Vektorbündel mit Rang n.

3. Für eine Mannigfaltigkeit M^n ist $V = M \times \mathbb{R}^r$ ein Vektorbündel mit Rang r. Dies heißt triviales Vektorbündel mit der Standardprojektion $\pi : M \times \mathbb{R}^r \to M$, $(x, v) \mapsto x$.

Wie die lokale Trivialisierung aussagt, sieht jedes Vektorbündel $V \to M$ lokal wie ein triviales Bündel aus.

Entscheidend an einer Mannigfaltigkeit waren die Kartenwechsel. Auch im Fall von Vektorbündeln sind es diese, die fast ausreichen um ein Vektorbündel zu charakterisieren:

Sei $\pi : V \to M$ ein Vektorbündel und seien $\Phi : V_{|U_\alpha} \to U_\alpha \times \mathbb{R}^r$ und $\Psi : V_{|U_\beta} \to U_\beta \times \mathbb{R}^r$ zwei überschneidende Trivialisierungen. Indem wir $U_\alpha \cap U_\beta$ anstelle von U_α bzw. U_β betrachten, können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $U = U_\alpha = U_\beta$. Da dies Trivialisierungen sind kommutiert das Diagramm

$$\begin{tikzcd} U \times \mathbb{R}^r \arrow[dr, "pr_1"'] & V_{|U} \arrow[l, "\Phi"'] \arrow[r, "\Psi"] \arrow[d, "\pi"] & U \times \mathbb{R}^r \arrow[dl, "pr_1"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

und es gilt

$$\Psi \circ \Phi^{-1}(p, a) = \Psi(\Phi_p^{-1}(a)) = (p, \Psi_p \circ \Phi_p^{-1}(a)), \quad \forall p \in U, a \in \mathbb{R}^r$$

Es genügt also für alle $p \in U$, wenn wir jedes $\Psi_p \circ \Phi^{-1}$ kennen. Da sowohl Φ_p als auch Ψ_p Isomorphismen sind, ist auch $\Psi_p \circ \Phi^{-1}$ ein Isomorphismus und diese Abbildung ist als Verkettung glatter Abbildungen selbst glatt.

Definition 8.5 (Übergangsfunktion)**.** Für ein Vektorbündel $\pi : V \to M$ und zwei Trivialisierungen $\Phi_\alpha : V_{|U_\alpha} \to U_\alpha \times \mathbb{R}^r$ und $\Phi_\beta : V_{|U_\beta} \to U_\beta \times \mathbb{R}^r$ heißt die glatte Abbildung

$$\Phi_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to GL(\mathbb{R}, r), \quad p \mapsto (\Phi_\beta)_p \circ (\Phi_\alpha^{-1})_p$$

Übergangsfunktion des Vektorbündels $\pi : V \to M$ (bzgl. der Trivialisierungen Φ_a und Φ_β).

Lemma 8.6. *Die Übergangsfunktionen erfühllen die folgende Bedingungen:*

$$\begin{aligned} \Phi_{\alpha\alpha} &= Id, & &\textit{auf } U_\alpha \\ \Phi_{\alpha\beta} \circ \Phi_{\beta\alpha} &= Id, & &\textit{auf } U_\alpha \cap U_\beta \\ \Phi_{\alpha\beta} \circ \Phi_{\beta\gamma} \circ \Phi_{\gamma\alpha} &= Id, & &\textit{auf } U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma \end{aligned} \tag{8.1}$$

Proof. (Übung) □

Bemerkung 8.7. 1) Die übergangsfunktionen geben anm wir wir zwischen $U_\alpha \times \mathbb{R}^r$ und $U_\beta \times \mathbb{R}^r$ umtransformieren müssen, wie also die Trivialisierungen miteinander zu identifizierren sind (ähnlich zu Kartenwechseln für einer Mannigfaltigkeit).

2) Man kann auch $\Phi_{\alpha_\beta}(p)$ als Matrix dastellen, wenn man z. B. die Standardbasis von $\mathbb{R}^r$ fixieren.

3) Sei $\Phi_\alpha : V_{|U_\alpha} \to U_\alpha \times \mathbb{R}^r$ eine Trivialisierung, und seien $e_1, \cdots, e_r$ are die Standard Basis vom $\mathbb{R}^r$. Wir bezeichnen mit $v_\alpha(p)$ die Basis $\Phi_\alpha^{-1}(p, e_1), \cdots, \Phi_\alpha^{-1}(p, e_r)$. Jeder Schnitt v hat bzgl einer Trivialisierung mit Basis $v_\alpha = v_1, \cdots, v_r$ Koordinatendarstellung $a = (a_1, \cdots, a_r) \in C^\infty(U_\alpha, \mathbb{R}^r)$ (oder $v = \sum_i^r a^i v_i$). Es gilt

$$a_\beta = \Phi_{\alpha\beta} a_\beta, \tag{8.2}$$

mit die Matrixdarstellung von $\Phi_{\alpha\beta}$.

Sind umkehrt $a_\alpha \in C^\in(U_\alpha, \mathbb{R}^r)$ mit (8.2) gegeben, so definieren wir einen globalen Schnitt v.

Unser Hauptziel ist ein Konstruktionsverfahren für Vektorbündel aus lokalen trivialiesierungen ähnlich zu Lemma 2.10. Mit diesem Verfahren wollen wir allgemein das Kotangentialbündel, Tensorbündel, usw. definieren.

Theorem 8.8 (Konstruktion von Vektorbündel)**.** *Sei $\{U_\alpha\}$ offene überdeckung einer Mannigfaltigkeit M, und es seien $\Phi_{\alpha\beta} : \mathcal{U}_\alpha \cap U_\beta \to GL(\mathbb{R}, r)$ gegeben mit der Kozykelbedingungen* (8.1)*. Dann existiert ein Vektorbündel $\pi : V \to M$ vom Rang r mit lokale Trivialisierungen Φ_α, so dass die $\Phi_{\alpha\beta}$ die übergangsfunktionen sind.*

Proof. Wir bilden die disjunkte Vereinigung der $U_\alpha \times \mathbb{R}^r$ und idetifizieren dann mithilfs der $\Phi_{\alpha\beta}$. Genauer detze

$$V = \cup U_\alpha \times \mathbb{R}^r / \sim,$$

wobei

$$(U_\alpha, p, a) \sim (U_\beta, q, b) \Longleftrightarrow p = q, \quad b = \Phi_{\alpha\beta}(p)a.$$

Die Kozykelbedingungen garantiert, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist. Definiere weiter

$$\pi : V \to M, \quad [(U_\alpha, p, a)] \mapsto p.$$

Jedes Element $[(U_\alpha, p, a)] \in \pi^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta)$ hat genau einer Repräsenten der Form (U_β, p, b) mit $b = \Phi_{\alpha\beta}(p)a$. Wir haben somit wohldefinierte Bijektionen

$$\Phi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \mathbb{R}^r, \quad [(U_\alpha, p, a)] \to (p, a).$$

Wir berechnen für $p \in U_\alpha \cap U_\beta$

$$\begin{aligned} (\Phi_\beta \circ \Phi_\alpha^{-1})(p, a) &= \Phi_\beta([(U_\alpha, p, a)]) \\ &= \Phi_\beta([U_\beta, p, \Phi_{\alpha\beta}(p)a)]) \\ &= (p, \Phi_{\alpha\beta}(p)a). \end{aligned}$$

D.h. Der Vektorbündel hat die übergangsfunktionen $\Phi_{\alpha\beta}$. Außderm sehen wir

$$\Phi_\alpha(\pi^{-1}(U_\alpha) \cap \pi^{-1}(U_\beta)) = (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^r.$$

Wir sind nun in der Situation von Lemma 2.10, um die Topologie zu definieren.

Da die $\mathcal{U}_\alpha \times \mathbb{R}^r$ nicht offene Teilmengen von eines $\mathbb{R}^N$ sind, sollen wir die Definition wie in Lemma 2.10 ein Bisschen ändern: $W \subset V$ offen $\iff \Phi_\alpha(W \cap \pi^{-1}(U_\alpha))$ offen in $U_\alpha \times \mathbb{R}^r$ für alle $\alpha \in A$. Dies ist die eindeutige Topologie, so dass $\pi^{-1}(U_\alpha)$ offen sind und $\Phi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \mathbb{R}^r$ homeomorph. Die Topogolie hat abzählbare Basis, falls die gegebene Überdeckung $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ abzählbar ist. Dies kdironnen Wir annehmen, da M abzählbare Basis hat.

Für $U \subset M$ offen ist $\Phi_\alpha(\pi^{-1}(U) \cap \pi^{-1}(U_\alpha)) = (U \cap U_\alpha) \times \mathbb{R}^r$ offen, also ist π stetig. Sind $\pi(v) = p$, $\pi(v') = p'$ mit $p \neq p'$, so gilt es offene Umgebung $U, U' \subset M$, $U \cap U' = \emptyset$, also sind $\pi^{-1}(U), \pi^{-1}(U')$ disjunkte Umgebungen von v, v'. Sind $v.v' \in V$ mit $\pi(v) = \pi(v') = p \in U$, so gilt $v = (U_\alpha, p, a)]$, $v' = (U_\alpha, p, a')]$ mit $a \neq a'$. Wähle $\rho > 0$ mit $B_\rho(a) \cap B_\rho(a') \neq \emptyset$, und definiere die disjunkte Umgebungen $W = \Phi_\alpha^{-1}(U_\alpha \times B_\rho(a))$ und $W' = \Phi_\alpha^{-1}(U_\alpha \times B_\rho(a'))$. Also ist V Hausdorffraum, und differenzierbare Mannigfaltigkeit , und π ist differenzierbar. Die Faser $V_p = \pi^{-1}\{p\})$ hat Vektorraumstruktur:

$$\lambda[(U_\alpha, p, a)] + \mu[(U_\alpha, p, b)] = [(U_\alpha, p, \lambda a + \mu b)].$$

Der Satz ist bewiesen. □

Definition 8.9. Sei $\pi_i : V_i \to M$ Vektorbündel $(i = 1, 2)$. Eine C^∞-Abbildung $F : V_1 \to V_2$ heißt *Vektorbündelhomomorphismus* (über Id_M), wenn gilt:
(1) $\pi_2 \circ F = \pi_1$, also $F((V_1)_p) \subset (V_2)_p$.
(2) $F : (V_1)_p \to (V_2)_p$ ist linear.
Ist F diffeomorph, so heißt F *Vektorbündel-Isomorphismus.*

(Man kann auch Vektorbündelhomomorphismus über $f : M_1 \to M_2$ betrachten.)

Theorem 8.10 (Eindeutigkeit des Bündels aus Übergangsfunktionen)**.** *Sei $\pi, \pi' : V, V' \to M$ Vektorbündel von Rang r über M mit lokale Trivialisieringen $\Phi_\alpha, \Phi'_\alpha : \pi(U_\alpha) \to \mathcal{U}_\alpha \times \mathbb{R}^r$ und Übergangsfunktionen $\Phi_{\alpha\beta}, \Phi'_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to GL(\mathbb{R}, r)$. Dann sind folgende Aussagen Äquivalent:*
(1) Es gibt glattes $C_\alpha : U_\alpha \to GL(\mathbb{R}, r)$ für $\alpha \in A$ mit

$$\Phi'_{\alpha\beta} \circ C_\alpha = C_\beta \circ \Phi_{\alpha\beta} \qquad \textit{auf } U_\alpha \cap U_\beta.$$

(2) Es gibt einen Bündel-Isomorphismus $F : V \to V'$.

Korollar 8.11. *Damit ist ein Vektorbündel durch die übergangsfunktionen eindeutig bestimmt bis auf Isomorphismus: Ist $\Phi'_{\alpha\beta} = \Phi_{\alpha\beta}$, so können wir $C_\alpha = Id_{\mathbb{R}^r}$ wählen.*

Beweis vom Satz. (2) $\Longrightarrow$ (1). Im Punkt $p \in U_\alpha \cap U_\beta$ definiere C_α mit dem Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^r \arrow[rrr, dotted, "C_\alpha"] \arrow[ddd, "\Phi_{\alpha\beta}"'] & & & \mathbb{R}^r \arrow[ddd, "\Phi'_{\alpha\beta}"] \\
& V_p \arrow[ul, "\Phi_\alpha"'] \arrow[r, "F"] \arrow[ddl, "\Phi_\beta"] & V'_p \arrow[ur, "\Phi'_a"] \arrow[ddr, "\Phi'_\beta"'] & \\
& & & \\
\mathbb{R}^r \arrow[rrr, dotted, "C_\beta"] & & & \mathbb{R}^r
\end{tikzcd},$$

also $C_\alpha := \Phi'_\alpha \circ F \circ \Phi_\alpha^{-1}$ für alle $\alpha \in A$. Es gilt $\Phi'_{\alpha\beta} \circ C_\alpha = \Phi'_{\alpha\beta} \circ \Phi'_\alpha \circ F \circ \Phi_\alpha^{-1} = \Phi'_\beta \circ F \circ \Phi_\alpha^{-1} = \Phi'_\beta \circ F \circ \Phi_\beta^{-1} \circ \Phi_\beta \circ \Phi_\alpha^{-1} = C_\beta \circ \Phi_{\alpha\beta}$ wie behauptet.

(1) $\Longrightarrow$ (2): Definiere $F : V \to V'$ durch

$$F = \Phi'_\alpha \circ C_\alpha \circ \Phi_\alpha.$$

Die Bedingung von (1) garantiert, dass F auf $\pi^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta)$ wohldefiniert und Isomorphismus ist. □