Theorem 3.14 (Harnack-Ungleichung). *Sei $u \in C^2(B_R(0)) \cap C^0(\overline{B_R(0)})$ harmonisch und nicht-negativ. Leiten Sie aus der Poisson-Formel folgende Version einer Harnackungleichung her:*

$$\frac{R^{n-2}(R-|x|)}{(R+|x|)^{n-1}}u(0) \le u(x) \le \frac{R^{n-2}(R+|x|)}{(R-|x|)^{n-1}}u(0)$$

für alle $x \in B_R(0)$.

Beweis. Übung □

Korollar 3.15 (Satz von Liouville). *Eine nach unten (oder nach oben) beschränkte harmonische Funktion $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ ist konstant.*

Beweis. Übung □

Als die zweite Anwendung des Satzes zeigen wir

Theorem 3.16 (Hebbarkeitssatz). *Sei u harmonisch in $B_R \backslash \{0\}$ und gelte*

$$u(x) = \begin{cases} o(\log|x|), & n=2, \\ o(|x|^{2-n}), & n \ge 3, \end{cases}, \quad \textit{als } |x| \to 0.$$

Dann besitzt u eine glatte harmonische Fortsetzung auf B_R.

Beweis. OBdA nehmen wir an, dass u stetig in $0 < |x| \le 2R$. Sei v eine Lösung von

$$\begin{cases} -\Delta u &= 0, & \text{in } B_R \\ u &= u, & \text{auf } \partial B_R. \end{cases}$$

Die Existenz von v ist von Theorem 3.13 gesichert. Setze $M := \max_{\partial B_R}|u|$. Es ist klar, dass die konstante Funktion $\pm M$ harmonisch ist und $-M \le v \le M$ auf ∂B_R gilt. Nach dem Starken Maximumprinzip (Theorem 2.13) gilt $-M \le v \le M$ in B_R, d.h.,

$$|v| \le M \quad \text{in } B_R.$$

Wir behaupten, dass $u = v$ in $B_R \backslash \{0\}$. Der Satz folgt klar aus der Behauptung. Um die Behauptung zu zeigen, sitzen wir $w = v - u$ in $B_r \backslash \{0\}$ und $M_r := \max_{\partial B_r}|w|$ für alle $r < R$. Wir betrachten nur den Fall $n \ge 3$. Der Fall $n = 2$ ist analog. Es ist offensichtig, dass

$$-M_r \cdot \frac{r^{n-2}}{|x|^{n-2}} \le w(x) \le M_r \cdot \frac{r^{n-2}}{|x|^{n-2}}, \qquad \text{auf } \partial B_r \cup \partial B_R$$

gilt. Denn es gilt auf ∂B_r nach der Definition von M_r und auf ∂B_R wegen $w = 0$ auf ∂B_R. Nochmal benutzen wir Theorem 2.13 und erhalten

$$-M_r \cdot \frac{r^{n-2}}{|x|^{n-2}} \le w(x) \le M_r \cdot \frac{r^{n-2}}{|x|^{n-2}}, \qquad \text{in } B_R \backslash B_r,$$

bzw.,

$$|w(x)| \le M_r \cdot \frac{r^{n-2}}{|x|^{n-2}}, \qquad \text{in } B_R \backslash B_r.$$

Da $M_r = \max_{\partial B_r}|v-u| \le \max_{\partial B_r}|v| + \max_{\partial B_r}|u| \le M + \max_{\partial B_r}|u|$, erhalten wir

$$|w(x)| \le M \cdot \frac{r^{n-2}}{|x|^{n-2}} + \frac{1}{|x|^{n-2}} \cdot (r^{n-2}\max_{\partial B_r}|u|), \qquad \text{in } B_R \backslash B_r.$$

Nun für beliebige $x \in B_R \backslash \{0\}$ nehemen wir $r < |x|$ und lassen $r \to 0$. Nach der Voraussetzung an u erhalten wir $w(x) = 0$ für alle $x \in B_R \backslash \{0\}$. □

4. Poisonn-Gelichung

In diesem Kapital untersuchen wir die Poisonn-Gelichung

$$-\Delta u = f$$

4.1. apriori Abschätzungen.

Lemma 4.1 (Eindeutigkeit)**.** *Sei Ω ein beschränktes Gebiet in $\mathbb{R}^n$. Dann für jede $f \in C(\Omega)$ und $\varphi \in C(\partial\Omega)$, existiert maximal eine Lösung $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ von dem Randwertproblem*

$$\begin{cases} -\Delta u &= f, \quad \text{in } \Omega \\ u &= \varphi, \quad \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

Theorem 4.2. *Sei Ω ein beschränktes Gebiet in $\mathbb{R}^n$, $f \in C(\overline{\Omega})$ und $\varphi \in C(\partial\Omega)$. Sei $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ eine Lösung von dem Randwertproblem*

$$\begin{cases} -\Delta u &= f, \quad \text{in } \Omega \\ u &= \varphi, \quad \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

Dann gilt

$$\sup_{\Omega} |u| \leq \max_{\partial\Omega} |\varphi| + C \sup_{\Omega} |f|,$$

wobei C eine positive Konstante ist, die nur von n und $\operatorname{diam}(\Omega)$ *abhängt.*

Beweis. Setze $F = \sup_\Omega |f|$ und $\Phi = \max_{\partial\Omega} |\varphi|$. Dann gilt

$$\begin{cases} -\Delta(\pm u) &= \pm f \leq F, \quad \text{in } \Omega \\ \pm u &= \pm\varphi \leq \Phi, \quad \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

OBdAkönnen wir annehmen, dass $\Omega \subset B_R$ für ein $R > 0$. Setze

$$v(x) = \Phi + \frac{F}{2n}(R^2 - |x|^2), \qquad \forall x \in \Omega.$$

Dann erhalten wir

$$\begin{cases} -\Delta v &= -F, \quad \text{in } \Omega \\ v &\geq 0, \quad \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

Betrachte $w_\pm = \pm u - v$. Wir haben

$$\begin{cases} -\Delta w_\pm &\leq 0, \quad \text{in } \Omega \\ w_\pm &\leq \Phi, \quad \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

Nach Satz 2.25 gilt

$$w_\pm \leq 0 \quad \text{in } \Omega,$$

bzw

$$|u(x)| \leq v = \Phi + \frac{F}{2n}(R^2 - |x|^2) \leq \Phi + \frac{R^2}{2n}F, \quad \forall x \in \Omega.$$

□

Mit zusätzlicher Bedingungen vom Rand, können wir die Abschätzung verbersern. Für jede Kugel B in $\mathbb{R}^n$, dfeinieren wir

$$d_x := \operatorname{dist}(x, \partial B).$$

Lemma 4.3. *Sei* $f \in C(B)$ *mit*

$$\sup_{x\in B} d_x^{2-\beta}|f(x)| < \infty,$$

für ein $\beta \in (0,1)$. *Sei* $u \in C(\overline{B}) \cap C^2(B)$ *eine Lösung von*

$$\begin{cases} -\Delta u &= f, & \text{in } \Omega \\ u &= 0, & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

Dann gilt

$$\sup_B d_x^{-\beta}|u(x)| \le C \sup_B d_x^{2-\beta}|f(x)|, \qquad \forall x \in B,$$

wobei $C > 0$ *nur von* n *und* β *abhängt.*

Beweis. OBdA, nehmen wir $B = B_R$ und

$$N := \sup_{x\in B_R} d_x^{2-\beta}|f(x)| < \infty.$$

Setze

$$v(x) = (R^2 - |x|^2)^\beta.$$

Eine direkte Berechung liefert

$$-\Delta v = 2\beta(R^2 - |x|^2)^{\beta-2}\{n(R^2 - |x|^2) + 2(1-\beta)|x|^2\}.$$

Für $|x| > R$, gilt

$$n(R^2 - |x|^2) + 2(1-\beta)|x|^2 \ge 2(1-\beta)(R^2 - |x|^2) + 2(1-\beta)|x|^2 = 2(1-\beta)R^2,$$

da $n \ge 2(1-\beta)$. Also, erhaten wir

$$\begin{aligned} -\Delta v &\ge 4\beta(1-\beta)R^2(R^2 - |x|^2)^{\beta-2} \\ &= \beta(1-\beta)R^\beta(R-|x|)^{\beta-2}\{4R^{2-\beta}(R+|x|)^{\beta-2}\} \\ &\ge \beta(1-\beta)R^\beta(R-|x|)^{\beta-2}, \end{aligned}$$

da

$$4R^2(R+|x|)^{\beta-2} = 4(1+\frac{|x|}{R})^{\beta-2} > 1.$$

Wir bemerken, dass $d_x = R - |x|$ für $x \in B_R$. Dann haben wir

$$\begin{aligned} -\Delta(\pm u) &= \pm f \le N d_x^{\beta-2} = N(R-|x|)^{\beta-2} \\ &= \{\beta(1-\beta)R^\beta\}^{-1} N\beta(1-\beta)R^\beta(R-|x|)^{\beta-2} \\ &\le \{\beta(1-\beta)R^\beta\}^{-1} N\Delta v. \end{aligned}$$

Es liefert

$$\begin{cases} -\Delta(\pm u - \{\beta(1-\beta)R^\beta\}^{-1}Nv) &\le 0, & \text{in } B_R, \\ \pm u - \{\beta(1-\beta)R^\beta\}^{-1}Nv &\le 0, & \text{auf } \partial B. \end{cases}$$

Nach Theorem 2.13 gilt

$$\pm u - \{\beta(1-\beta)R^\beta\}^{-1}Nv \le 0, \qquad \text{in } B.$$

Also

$$\begin{aligned} |u(x)| &\le \{\beta(1-\beta)R^\beta\}^{-1}Nv = \{\beta(1-\beta)R^\beta\}^{-1}N(R^2-|x|^2)^\beta \\ &= 2\{\beta(1-\beta)\}^{-1}N(R-|x|)^\beta \frac{R^{-\beta}(R+|x|)^\beta}{2} \le 2\{\beta(1-\beta)\}^{-1}N(R-|x|)^\beta \\ &= \frac{2}{\beta(1-\beta)}N d_x^\beta. \end{aligned}$$

□

Bemerkung 4.4. Wir haben einige Bemerkungen über Theorem 4.2 und Lemma 4.3.

(1) Wir nennen die Abschätzungen in Theorem 4.2 und Lemma 4.3 *apriori Abschätzungen*. Das heißt, wir nehemen an, dass die Lösung schon existiert, und dann wir die passende Norm von der Lösung durch vorgegebenen Datei herleiten. Die apriori Abschätzungen herzuleiten ist der erste Schritt für die Untersuchung der Existenz der Lösungen einer partiellen Differentialgleichung.
(2) Eine passende Norm für die Abschätzungen zufinden ist auch sehr wichtig. Sehen Sie das folgende Beispiel.

Beispiel 4.5. Sei f eine Funktion in $B_1 \subset \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x_2^2 - x_1^2}{|x|^2} \left\{ \dfrac{2}{(-\log|x|)^{1/2}} + \dfrac{1}{4(-\log|x|)^{3/2}} \right\}, & \forall x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Dann ist f stetig in B_1. Betrachte

$$-\Delta u = f \qquad \text{in } B_1. \tag{4.1}$$

Definiere

$$u(x) = -\begin{cases} (x_1^2 - x_2^2)(-\log|x|)^{1/2}, & \forall x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Dann gilt $u \in C(B_1) \cap C^\infty(B_1 \backslash \{0\})$. Eine direkte Berechnung zeigt, dass u die Gleichung $-\Delta u = f$ in $B_1 \backslash \{0\}$ erfüllt und

$$\lim_{x \to 0} u_{x_1 x_1}(x) = \infty.$$

Also, u ist nicht in $C^2(B_1)$. Nun wir zeigen, dass (4.1) für diese gewählte stetige Funktion f keine C^2 Lösung besitzt. Angenommen, dass $v \in C^2(B_1)$ eine Lösung von (4.1) ist. Für ein feste $R \in (0,1)$ ist $w := u - v$ harmonisch in $B_R \backslash \{0\}$. Da $u \in C(\overline{B}_R)$ und $v \in C^2(\overline{B}_R)$, ist w stetig in B_R. Nach Theorem 3.16 ist w harmonisch und dann C^2 in B_1. Insbesondere ist u auch C^2 in B_1, ein Widerspruch. □

4.2. Hölder-Normen und Potentialtheoetische Abschätzungen.

Definition 4.6 (Hölder-stetigkeit, Hölder-Norm)**.** Sei $\Omega \subset \mathbb{R}$ offen und $0 < \alpha \leq 1$. Eine Abbildung $f : \Omega \to \mathbb{R}$ heißt Hölder-stetig zum Exponenten α genau dann, wenn eine positive reelle Zahl C existiert, so dass für alle $x, y \in \Omega$ gilt:

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^\alpha.$$

Wir bezeichnen den Raum der Hölder-stetigen Funktionen zum Exponenten α mit $C^\alpha(\overline{\Omega})$. Sei $k \geq 0$ eine ganze Zahl und $0 < \alpha \leq 1$. Sei Ω ein beschränktes Gebiet mit $C^{k,\alpha}$ Rand. Der Raum $C^{k,\alpha}(\Omega)$ ist die Menge der Funktionen definiert durch

$$C^{k,\alpha}(\overline{\Omega}) := \left\{ u \in C^k(\overline{\Omega}) \,|\, D^\beta u \in C^\alpha(\overline{\Omega}), \quad \forall \beta \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^n \text{ mit } |\beta| = k \right\}$$

Wir definieren

$$[u]_{C^\alpha(\overline{\Omega})} := \sup \left\{ \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\alpha} \;\middle|\; x, y \in \Omega, x \neq y \right\}$$

Man kann zeigen, dass $C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$, versehen mit der Norm

$$\|u\|_{C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})} := \|u\|_{C^k} + \sum_{\beta \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^n, |\beta| = k} [D^\beta]_{C^\alpha(\overline{\Omega})},$$

ein Banachraum ist. Hierbei ist

$$\|u\|_{C^k(\overline{\Omega})} = \sum_{i=0}^{k} \sum_{\beta \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^n, |\beta| = k} \sup_\Omega |D^\beta u|$$

die Norm von $C^k(\overline{\Omega})$. Wann $k = 0$, wir bezeichen $C^{0,\alpha}$ mit C^α und die Norm für C^α ist

$$\|u\|_{C^\alpha} = \|u\|_{C^0} + [u]_{C^\alpha}.$$

Definition 4.7 (Newton-Potentielle)**.** Sei Ω ein offenes, beschränktes Gebiet, und sei f stetig in Ω. Die Newton-Potentielle von f in Ω ist definiert durch

$$w(x) = \int_\Omega \Gamma(x-y)f(y)dy,$$

wobei Γ die Fundamentallösung ist.

Es ist leicht to zeigen, dass w wohl-definiert und stetig ist.

Lemma 4.8. *Sei $\Omega = B_1$ die Einheitskugel in $\mathbb{R}^n$, f stetig in B_1 und w die Newton-Potentielle von f in B_1. Dann gilt $w \in C^1(\mathbb{R}^n)$ und für jede $x \in \mathbb{R}^n$ und $i = 1, 2, \cdots, n$ gilt*

$$\partial_i w(x) = \int_{B_1} \partial x_i \Gamma(x-y)f(y)dy.$$

Weiter gilt

$$|w|_{C^1(\overline{B_1})} \leq C|f|_{L^\infty(B_1)},$$

für eine Konstante $C > 0$, die nur von n abhängt.

Beweis. Setze

$$v_i(x) := \int_{B_1} \partial_{x_i}\Gamma(x-y)f(y)dy.$$

v_i ist wohl-definiert and stetig in $\mathbb{R}^n$. Wir sollen $v_i = \partial_i w$ zeigen. Wähle wir eine Abschneid-Funktion $\eta \in C^1(\mathbb{R})$ mit $0 \leq eta \leq 1$, $0 \leq \eta' \leq 2$, $\eta(t) = 0$ für $t \leq 1$ und $\eta(t) = 1$ für $t \geq 2$. Für beliebige $\varepsilon > 0$ definiere

$$w_\varepsilon(x) = \int_{B_1} \Gamma\eta_\varepsilon f(y)dy,$$

wobei $\Gamma = \Gamma(x-y)$ und $\eta_\varepsilon = \eta(|x-y|/\varepsilon)$. Man kann leicht zeigen, dass $w_\varepsilon \in C^1(\mathbb{R}^n)$ und

$$\partial_i w_\varepsilon(x) = \int_{B_1} \partial_i(\eta_\varepsilon\Gamma)f(y)dy,$$

da $\eta_\varepsilon\Gamma$ in $\mathbb{R}^n$ glatt ist. Es liefert

$$v_i(x) - \partial_i w(x) = \int_{B_1} \partial_i(1-\eta_\varepsilon\Gamma)f(y)dy$$

Da die Intergrand Null ist für $|x-y| \geq 2\varepsilon$, erhalten wir

$$|v_i(x) - \partial_i w(x)| \leq \sup|f| \int_{|x-y|\leq 2\varepsilon} (|\partial_i\Gamma| + \frac{2}{\varepsilon}|\Gamma|)dy.$$

Eine direkte Berechnung liefert

$$|v_i(x) - \partial_i w(x)| \leq \frac{2n\varepsilon}{n-2}\sup|f|, \qquad \text{für } n \geq 3$$

und

$$|v_i(x) - \partial_i w(x)| \leq 4\varepsilon(1 + |\log 2\varepsilon|)\sup|f|, \qquad \text{für } n = 2.$$

Dies zeiget, dass w_ε und $\partial_i w_\varepsilon$ gegen w und u_i gleichmäßig in Kompaktum in $\mathbb{R}^n$ konvergieren. Es folgt, dass $\partial_i w = v_i$. □

Weiter wollen wir fragen, ob $w \in C^2$. Da $D^2\Gamma$ nicht integrabel ist, knnen wir ohne zusätzliche Bedingung an f dies nicht zeigen.

Lemma 4.9. *Sei $\Omega = B_1$ die Einheitskugel in $\mathbb{R}^n$, $f \in L^\infty(B_1) \cap C^\alpha(B_1)$ für ein $\alpha \in (0,1)$ und w die Newton-Potentielle von f in B_1. Dann gilt $w \in C^{2,\alpha}(B_1) \cap C(\overline{B_1})$ und*

$$\Delta w = f \quad \text{in } B_1.$$

Weiter gilt

$$|w|_{C^{2,\alpha}(\overline{B_{1/2}})} \leq C|f|_{C^\alpha(B_1)},$$

für eine Konstante $C > 0$, die nur von n und α abhängt.

Beweis. Schritt 1. $w \in C^2(B_1)$ und für $x \in B_1$ unf $i, j = 1, 2, \cdots, n$, gilt

$$\partial_{ij} w(x) = \int_{B_1} \partial_{x_i x_j} \Gamma(x-y)\{f(y) - f(x)\} df - f(x) \int_{\partial B_1} \partial_{x_j} \Gamma(x-y) \nu_i(y)\, dS_y.$$

Sezte

$$v_{ij}(x) := \int_{B_1} \partial_{x_i x_j} \Gamma(x-y)\{f(y) - f(x)\} df - f(x) \int_{\partial B_1} \partial_{x_j} \Gamma(x-y) \nu_i(y)\, dS_y.$$

Da f Hölder-stetig ist, ist v_{ij} wohl-definiert in B_1. Für beliebige $\varepsilon > 0$ definiere

$$v_{i,\varepsilon}(x) := \int_{B_1} \partial_i \Gamma \eta_\varepsilon f(y) dy,$$

wobei $\Gamma = \Gamma(x-y)$, $\eta_\varepsilon = \eta(|x-y|/\varepsilon)$ und η im Beweis von Lemma 4.8 gegeben ist. Es sit klar, dass $v_{i,\varepsilon} \in C^1(B_1)$. Beim Ableiten von $v_{i,\varepsilon}$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
\partial_j v_{i,\varepsilon}(x) &= \int_{B_1} \partial_j(\partial_i \Gamma \eta_\varepsilon) f(y) dy \\
&= \int_{B_1} \partial_j(\partial_i \Gamma \eta_\varepsilon) \{f(y) - f(x)\}\, dy + f(x) \int_{B_1} \partial_j(\partial_i \Gamma \eta_\varepsilon) dy \\
&= \int_{B_1} \partial_j(\partial_i \Gamma \eta_\varepsilon) \{f(y) - f(x)\}\, dy - f(x) \int_{B_1} \partial_i \Gamma \nu_i\, dS_y,
\end{aligned}$$

für hinreichend kleine ε. Es folgt

$$\begin{aligned}
|v_{ij}(x) - \partial_j v_{i,\varepsilon}(x)| &= \int_{B_1} \partial_j[(1-\eta_\varepsilon)\partial_i \Gamma] \{f(y) - f(x)\} |dy \\
&\leq \int_{|y-x| \leq 2\varepsilon} |\partial_j(1-\eta_\varepsilon)\partial_i \Gamma| f(y) - f(x)| dy \\
&\leq [f]_{\alpha,x} \int_{|y-x| \leq 2\varepsilon} \left(|\partial_{ij}\Gamma| + \frac{2}{\varepsilon} |\partial_i \Gamma| \right) |y-x|^\alpha dy \\
&\leq \left(\frac{n}{\alpha} + 4 \right) [f]_{\alpha,x} (2\varepsilon)^\alpha,
\end{aligned}$$

wenn $|x| < 1 - 2\varepsilon$. Daraus gilt dass $\partial_j v_{i,\varepsilon}$ gegen v_{ij} gleichmämißig in aller kompakten Teilmenge in B_1 konvergiert.

$\square$