4. Poisonn-Gelichung

In diesem Kapital untersuchen wir die Poisonn-Gelichung

$$-\Delta u = f$$

4.1. apriori Abschätzungen.

Lemma 4.1 (Eindeutigkeit)**.** *Sei Ω ein beschränktes Gebiet in $\mathbb{R}^n$. Dann für jede $f \in C(\Omega)$ und $\varphi \in C(\partial\Omega)$, existiert maximal eine Lösung $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ von dem Randwertproblem*

$$\begin{cases} -\Delta u &= f, & \textit{in } \Omega \\ u &= \varphi, & \textit{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

Theorem 4.2. *Sei Ω ein beschränktes Gebiet in $\mathbb{R}^n$, $f \in C(\overline{\Omega})$ und $\varphi \in C(\partial\Omega)$. Sei $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ eine Lösung von dem Randwertproblem*

$$\begin{cases} -\Delta u &= f, & \textit{in } \Omega \\ u &= \varphi, & \textit{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

Dann gilt

$$\sup_{\Omega} |u| \leq \max_{\partial\Omega} |\varphi| + C \sup_{\Omega} |f|,$$

wobei C eine positive Konstante ist, die nur von n und $\operatorname{diam}(\Omega)$ *abhängt.*

Beweis. Setze $F = \sup_\Omega |f|$ und $\Phi = \max_{\partial\Omega} |\varphi|$. Dann gilt

$$\begin{cases} -\Delta(\pm u) &= \pm f \leq F, & \text{in } \Omega \\ \pm u &= \pm\varphi \leq \Phi, & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

OBdAkönnen wir annehmen, dass $\Omega \subset B_R$ für ein $R > 0$. Setze

$$v(x) = \Phi + \frac{F}{2n}(R^2 - |x|^2), \qquad \forall x \in \Omega.$$

Dann erhalten wir

$$\begin{cases} -\Delta v &= -F, & \text{in } \Omega \\ v &\geq 0, & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

Betrachte $w_\pm = \pm u - v$. Wir haben

$$\begin{cases} -\Delta w_\pm &\leq 0, & \text{in } \Omega \\ w_\pm &\leq \Phi, & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

Nach Satz 2.25 gilt

$$w_\pm \leq 0 \quad \text{in } \Omega,$$

bzw

$$|u(x)| \leq v = \Phi + \frac{F}{2n}(R^2 - |x|^2) \leq \Phi + \frac{R^2}{2n}F, \quad \forall x \in \Omega.$$

□

Mit zusätzlicher Bedingungen vom Rand, können wir die Abschätzung verbersern. Für jede Kugel B in $\mathbb{R}^n$, dfeinieren wir

$$d_x := \operatorname{dist}(x, \partial B).$$

Lemma 4.3. *Sei $f \in C(B)$ mit*

$$\sup_{x\in B} d_x^{2-\beta}|f(x)| < \infty,$$

für ein $\beta \in (0,1)$. Sei $u \in C(\overline{B}) \cap C^2(B)$ eine Lösung von

$$\begin{cases} -\Delta u &= f, & \text{in } \Omega \\ u &= 0, & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

Dann gilt

$$\sup_B d_x^{-\beta}|u(x)| \le C \sup_B d_x^{2-\beta}|f(x)|, \qquad \forall x \in B,$$

wobei $C > 0$ nur von n und β abhängt.

Beweis. OBdA, nehmen wir $B = B_R$ und

$$N := \sup_{x\in B_R} d_x^{2-\beta}|f(x)| < \infty.$$

Setze

$$v(x) = (R^2 - |x|^2)^\beta.$$

Eine direkte Berechung liefert

$$-\Delta v = 2\beta(R^2-|x|^2)^{\beta-2}\{n(R^2-|x|^2) + 2(1-\beta)|x|^2\}.$$

Für $|x| > R$, gilt

$$n(R^2-|x|^2) + 2(1-\beta)|x|^2 \ge 2(1-\beta)(R^2-|x|^2) + 2(1-\beta)|x|^2 = 2(1-\beta)R^2,$$

da $n \ge 2(1-\beta)$. Also, erhaten wir

$$\begin{aligned} -\Delta v &\ge 4\beta(1-\beta)R^2(R^2-|x|^2)^{\beta-2} \\ &= \beta(1-\beta)R^\beta(R-|x|)^{\beta-2}\{4R^{2-\beta}(R+|x|)^{\beta-2}\} \\ &\ge \beta(1-\beta)R^\beta(R-|x|)^{\beta-2}, \end{aligned}$$

da

$$4R^2(R+|x|)^{\beta-2} = 4(1+\frac{|x|}{R})^{\beta-2} > 1.$$

Wir bemerken, dass $d_x = R - |x|$ für $x \in B_R$. Dann haben wir

$$\begin{aligned} -\Delta(\pm u) &= \pm f \le N d_x^{\beta-2} = N(R-|x|)^{\beta-2} \\ &= \{\beta(1-\beta)R^\beta\}^{-1} N\beta(1-\beta)R^\beta(R-|x|)^{\beta-2} \\ &\le \{\beta(1-\beta)R^\beta\}^{-1} N\Delta v. \end{aligned}$$

Es liefert

$$\begin{cases} -\Delta(\pm u - \{\beta(1-\beta)R^\beta\}^{-1}Nv) &\le 0, & \text{in } B_R, \\ \pm u - \{\beta(1-\beta)R^\beta\}^{-1}Nv &\le 0, & \text{auf } \partial B. \end{cases}$$

Nach Theorem 2.13 gilt

$$\pm u - \{\beta(1-\beta)R^\beta\}^{-1}Nv \le 0, \qquad \text{in } B.$$

Also

$$\begin{aligned} |u(x)| &\le \{\beta(1-\beta)R^\beta\}^{-1}Nv = \{\beta(1-\beta)R^\beta\}^{-1}N(R^2-|x|^2)^\beta \\ &= 2\{\beta(1-\beta)\}^{-1}N(R-|x|)^\beta \frac{R^{-\beta}(R+|x|)^\beta}{2} \le 2\{\beta(1-\beta)\}^{-1}N(R-|x|)^\beta \\ &= \frac{2}{\beta(1-\beta)}Nd_x^\beta. \end{aligned}$$

□

Bemerkung 4.4. Wir haben einige Bemerkungen über Theorem 4.2 und Lemma 4.3.

(1) Wir nennen die Abschätzungen in Theorem 4.2 und Lemma 4.3 *apriori Abschätzungen*. Das heißt, wir nehemen an, dass die Lösung schon existiert, und dann wir die passende Norm von der Lösung durch vorgegebenen Datei herleiten. Die apriori Abschätzungen herzuleiten ist der erste Schritt für die Untersuchung der Existenz der Lösungen einer partiellen Differentialgleichung.
(2) Eine passende Norm für die Abschätzungen zufinden ist auch sehr wichtig. Sehen Sie das folgende Beispiel.

Beispiel 4.5. Sei f eine Funktion in $B_1 \subset \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x_2^2 - x_1^2}{|x|^2} \left\{ \dfrac{2}{(-\log|x|)^{1/2}} + \dfrac{1}{4(-\log|x|)^{3/2}} \right\}, & \forall x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Dann ist f stetig in B_1. Betrachte

$$-\Delta u = f \qquad \text{in } B_1. \tag{4.1}$$

Definiere

$$u(x) = -\begin{cases} (x_1^2 - x_2^2)(-\log|x|)^{1/2}, & \forall x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Dann gilt $u \in C(B_1) \cap C^\infty(B_1 \backslash \{0\})$. Eine direkte Berechnung zeigt, dass u die Gleichung $-\Delta u = f$ in $B_1 \backslash \{0\}$ erfüllt und

$$\lim_{x \to 0} u_{x_1 x_1}(x) = \infty.$$

Also, u ist nicht in $C^2(B_1)$. Nun wir zeigen, dass (4.1) für diese gewählte stetige Funktion f keine C^2 Lösung besitzt. Angenommen, dass $v \in C^2(B_1)$ eine Lösung von (4.1) ist. Für ein feste $R \in (0,1)$ ist $w := u - v$ harmonisch in $B_R \backslash \{0\}$. Da $u \in C(\overline{B}_R)$ und $v \in C^2(\overline{B}_R)$, ist w stetig in B_R. Nach Theorem 3.16 ist w harmonisch und dann C^2 in B_1. Insbesondere ist u auch C^2 in B_1, ein Widerspruch. □

4.2. **Hölder-Normen und Potentialtheoetische Abschätzungen.**

Definition 4.6 (Hölder-stetigkeit, Hölder-Norm)**.** Sei $\Omega \subset \mathbb{R}$ offen und $0 < \alpha \leq 1$. Eine Abbildung (Funktion) $f : \Omega \to \mathbb{R}$ heißt Hölder-stetig zum Exponenten α genau dann, wenn eine positive reelle Zahl C existiert, so dass für alle $x, y \in \Omega$ gilt:

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^\alpha.$$

Wir bezeichnen den Raum der Hölder-stetigen Funktionen zum Exponenten α mit $C^\alpha(\overline{\Omega})$. Sei $k \geq 0$ eine ganze Zahl und $0 < \alpha \leq 1$. Sei Ω ein beschränktes Gebiet mit $C^{k,\alpha}$ Rand. Der Raum $C^{k,\alpha}(\Omega)$ ist die Menge der Funktionen definiert durch

$$C^{k,\alpha}(\overline{\Omega}) := \left\{ u \in C^k(\overline{\Omega}) \,|\, D^\beta u \in C^\alpha(\overline{\Omega}), \quad \forall \beta \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^n \text{ mit } |\beta| = k \right\}$$

Wir definieren

$$[u]_{C^\alpha(\overline{\Omega})} := \sup \left\{ \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\alpha} \;\middle|\; x, y \in \Omega, x \neq y \right\}$$

Man kann zeigen, dass $C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$, versehen mit der Norm

$$\|u\|_{C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})} := \|u\|_{C^k} + \sum_{\beta \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^n, |\beta| = k} [D^\beta]_{C^\alpha(\overline{\Omega})},$$

ein Banachraum ist. Hierbei ist

$$\|u\|_{C^k(\overline{\Omega})} = \sum_{i=0}^{k} \sum_{\beta \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^n, |\beta| = k} \sup_\Omega |D^\beta u|$$

die Norm von $C^k(\overline{\Omega})$. Wann $k = 0$, wir bezeichen $C^{0,\alpha}$ mit C^α und die Norm für C^α ist

$$\|u\|_{C^\alpha} = \|u\|_{C^0} + [u]_{C^\alpha}.$$

Definition 4.7 (das Newton-Potential)**.** Sei Ω ein offenes, beschränktes Gebiet, und sei f stetig in Ω. Die Newton-Potentielle von f in Ω ist definiert durch

$$w(x) = \int_\Omega \Gamma(x-y)f(y)dy,$$

wobei Γ die Fundamentallösung ist.

Es ist leicht to zeigen, dass w wohl-definiert und stetig ist.

Lemma 4.8. *Sei $\Omega = B_1$ die Einheitskugel in $\mathbb{R}^n$, f stetig in B_1 und w die Newton-Potentielle von f in B_1. Dann gilt $w \in C^1(\mathbb{R}^n)$ und für jede $x \in \mathbb{R}^n$ und $i = 1, 2, \cdots, n$ gilt*

$$\partial_i w(x) = \int_{B_1} \partial x_i \Gamma(x-y)f(y)dy.$$

Weiter gilt

$$|w|_{C^1(\overline{B}_1)} \le C|f|_{L^\infty(B_1)},$$

für eine Konstante $C > 0$, die nur von n abhängt.

Beweis. Setze

$$v_i(x) := \int_{B_1} \partial_{x_i}\Gamma(x-y)f(y)dy.$$

v_i ist wohl-definiert and stetig in $\mathbb{R}^n$. Wir sollen $v_i = \partial_i w$ zeigen. Wähle wir eine Abschneid-Funktion $\eta \in C^1(\mathbb{R})$ mit $0 \le eta \le 1$, $0 \le \eta' \le 2$, $\eta(t) = 0$ für $t \le 1$ und $\eta(t) = 1$ für $t \ge 2$. Für beliebige $\varepsilon > 0$ definiere

$$w_\varepsilon(x) = \int_{B_1} \Gamma\eta_\varepsilon f(y)dy,$$

wobei $\Gamma = \Gamma(x-y)$ und $\eta_\varepsilon = \eta(|x-y|/\varepsilon)$. Man kann leicht zeigen, dass $w_\varepsilon \in C^1(\mathbb{R}^n)$ und

$$\partial_i w_\varepsilon(x) = \int_{B_1} \partial_i(\eta_\varepsilon\Gamma)f(y)dy,$$

da $\eta_\varepsilon\Gamma$ in $\mathbb{R}^n$ glatt ist. Es liefert

$$v_i(x) - \partial_i w(x) = \int_{B_1} \partial_i(1-\eta_\varepsilon\Gamma)f(y)dy$$

Da die Intergrand Null ist für $|x-y| \ge 2\varepsilon$, erhalten wir

$$|v_i(x) - \partial_i w(x)| \le \sup|f| \int_{|x-y|\le 2\varepsilon} (|\partial_i\Gamma| + \frac{2}{\varepsilon}|\Gamma|)dy.$$

Eine direkte Berechnung liefert

$$|v_i(x) - \partial_i w(x)| \le \frac{2n\varepsilon}{n-2}\sup|f|, \qquad \text{für } n \ge 3$$

und

$$|v_i(x) - \partial_i w(x)| \le 4\varepsilon(1 + |\log 2\varepsilon|)\sup|f|, \qquad \text{für } n = 2.$$

Dies zeiget, dass w_ε und $\partial_i w_\varepsilon$ gegen w und u_i gleichmäßig in Kompaktum in $\mathbb{R}^n$ konvergieren. Es folgt, dass $\partial_i w = v_i$. □

Weiter wollen wir fragen, ob $w \in C^2$. Da $D^2\Gamma$ nicht integrabel ist, knnen wir ohne zusätzliche Bedingung an f dies nicht zeigen.

Lemma 4.9. *Sei $\Omega = B_1$ die Einheitskugel in $\mathbb{R}^n$, $f \in L^\infty(B_1) \cap C^\alpha(B_1)$ für ein $\alpha \in (0,1)$ und w die Newton-Potentielle von f in B_1. Dann gilt $w \in C^{2,\alpha}(B_1) \cap C(\overline{B_1})$ und*

$$\Delta w = f \quad \text{ in } B_1.$$

Weiter gilt

$$|w|_{C^{2,\alpha}(\overline{B}_{1/2})} \le C|f|_{C^\alpha(B_1)},$$

für eine Konstante $C > 0$, die nur von n und α abhängt.

Beweis. Schritt 1. $w \in C^2(B_1)$ und für $x \in B_1$ unf $i, j = 1, 2, \cdots, n$, gilt

$$\partial_{ij} w(x) = \int_{B_1} \partial_{x_i x_j} \Gamma(x-y)\{f(y) - f(x)\} df - f(x) \int_{\partial B_1} \partial_{x_j} \Gamma(x-y) \nu_i(y)\, dS_y.$$

Sezte

$$v_{ij}(x) := \int_{B_1} \partial_{x_i x_j} \Gamma(x-y)\{f(y) - f(x)\} df - f(x) \int_{\partial B_1} \partial_{x_j} \Gamma(x-y) \nu_i(y)\, dS_y.$$

Da f Hölder-stetig ist, ist v_{ij} wohl-definiert in B_1. Für beliebige $\varepsilon > 0$ definiere

$$v_{i,\varepsilon}(x) := \int_{B_1} \partial_i \Gamma \eta_\varepsilon f(y) dy,$$

wobei $\Gamma = \Gamma(x-y)$, $\eta_\varepsilon = \eta(|x-y|/\varepsilon)$ und η im Beweis von Lemma 4.8 gegeben ist. Es sit klar, dass $v_{i,\varepsilon} \in C^1(B_1)$. Beim Ableiten von $v_{i,\varepsilon}$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
\partial_j v_{i,\varepsilon}(x) &= \int_{B_1} \partial_j(\partial_i \Gamma \eta_\varepsilon) f(y) dy \\
&= \int_{B_1} \partial_j(\partial_i \Gamma \eta_\varepsilon) \{f(y) - f(x)\}\, dy + f(x) \int_{B_1} \partial_j(\partial_i \Gamma \eta_\varepsilon) dy \\
&= \int_{B_1} \partial_j(\partial_i \Gamma \eta_\varepsilon) \{f(y) - f(x)\}\, dy - f(x) \int_{B_1} \partial_i \Gamma \nu_i\, dS_y,
\end{aligned}$$

für hinreichend kleine ε. Es folgt

$$\begin{aligned}
|v_{ij}(x) - \partial_j v_{i,\varepsilon}(x)| &= \int_{B_1} \partial_j [(1-\eta_\varepsilon)\partial_i \Gamma] \{f(y) - f(x)\} |dy \\
&\le \int_{|y-x| \le 2\varepsilon} |\partial_j (1-\eta_\varepsilon) \partial_i \Gamma | f(y) - f(x)| dy \\
&\le [f]_{\alpha,x} \int_{|y-x| \le 2\varepsilon} \left(|\partial_{ij}\Gamma| + \frac{2}{\varepsilon} |\partial_i \Gamma| \right) |y-x|^\alpha dy \\
&\le \left(\frac{n}{\alpha} + 4 \right) [f]_{\alpha,x} (2\varepsilon)^\alpha,
\end{aligned}$$

wenn $|x| < 1 - 2\varepsilon$. Daraus gilt dass $\partial_j v_{i,\varepsilon}$ gegen v_{ij} gleichmämißig in aller kompakten Teilmenge in B_1 konvergiert.

□

Definition 4.10. (1) $f : D \to \mathbb{R}$ heißt *hölderstetig* an $x_0 \in D$, falls

$$[f]_{C^\alpha, x_0} = [f]_{C^\alpha, x_0, D} := \sup_{x \in D} \frac{|f(x) - f(x_0)|}{|x - x_0|^\alpha} < \infty.$$

(2) $f : D \to \mathbb{R}$ heißt *gleichmäßig hölderstetig* in D, falls

$$[f]_{C^\alpha} = [f]_{C^\alpha, D} := \sup_{x,y \in D} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha} < \infty.$$

(3) $f : D \to \mathbb{R}$ heißt *lokal hölderstetig* in D, falls f gleichmäßig hölderstetig in jeder kompakten Teilmenge von D.

Ist f lokal hölderstetig in einer kompakten Menge D, dann ist f punktweise hölderstetig in D, d.h., f an jeden Punkt $x \in D$ hölderstetig ist. Für offene Menge D gilt dies nicht immer. Es gilt, falls f zutätzlich beschränkt in D ist.

Bemerkung 4.11. In den Beweis von Lemma labellem4.9 erhalten wir die folgende Abschätzung

$$\|w\|_{C^{2,\alpha}(\overline{B}_{1/2})} \le C \sup_{x \in \overline{B}_{1/2}} [f]_{\alpha,x,B_1}.$$

Bemerkung 4.12. Statt B_1 und $B_{\frac{1}{2}}$ gilt Lemma 4.9 auch für bliebiges beschränktes C^1-Gebiet Ω und $\Omega' \subset\subset \Omega$. (Übung)

Nun untersuchen wir bliebige Lösungen von der Poisson-Gleichung.

Theorem 4.13. *Sei $f \in C^\alpha(B_1)$ für ein $\alpha \in (0,1)$ mit $\|f\|_{C^\alpha(B_1)} < \infty$. Sei $u \in L^\infty(B_1) \cap C^2(B_1)$ eine Lösung von $\Delta u = f$ in B_1. Dann $u \in C^{2,\alpha}(B_1)$. Weiter gilt*

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}(B_{\frac{1}{2}})} \leq C(|u|_{L^\infty(B_1)} + |f|_{C^\alpha(B_1)}),$$

wobei $C > 0$ eine nur von n und α abhängten Konstante.

Beweis. Sei w das Newtonpotential von f in B_1. Nach Lemma 4.8 gilt

$$\|w\|_{C^1(B_1)} \leq C\|f\|_{L^\infty(B_1)}.$$

Nach Lemma 4.9 ist $w \in C^{2,\alpha}(B_1)$ und eine Lösung von $\Delta u = f$. Weiter gilt

$$\|w\|_{C^{2,\alpha}(B_{\frac{1}{2}})} \leq C\|f\|_{C^\alpha(B_1)}.$$

Setze $v = u - w$. Dann ist v harmonisch in B_1 und erhaten wir

$$\|v\|_{L^\infty(B_1)} \leq \|u\|_{L^\infty(B_1)} + \|w\|_{L^\infty(B_1)} \leq \|u\|_{L^\infty(B_1)} + C\|f\|_{L^\infty(B_1)}.$$

Höhere innere Abschätzungen von harmonischen Funktionen, Theorem 2.19, impliziert

$$\|v\|_{C^{2,\alpha}(B_{\frac{1}{2}})} \leq \|v\|_{C^3(B_{\frac{1}{2}})} \leq C\|v\|_{L^\infty(B_1)} \leq \|u\|_{L^\infty(B_1)} + C\|f\|_{L^\infty(B_1)}.$$

Dann erhaten wir die gewünschten Abschätzung

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}(B_{\frac{1}{2}})} \leq C(|u|_{L^\infty(B_1)} + |f|_{C^\alpha(B_1)}).$$

□

In allgemeinen haben wir die folgende Resultat durch Skalierung

Theorem 4.14. *Sei B_R eine Kugel in $\mathbb{R}^n$ mit Radius R, $f \in C^\alpha(B_R)$ für ein $\alpha \in (0,1)$ und $\|f\|_{C^\alpha(B_R)} < \infty$. Sei $u \in L^\infty(B_R) \cap C^2(B_R)$ eine Lösung von $\Delta u = f$ in B_R. Dann $u \in C^{2,\alpha}(B_R)$. Weiter gilt*

$$\begin{aligned} R\|\nabla u\|_{L^\infty(B_{\frac{R}{2}})} &+ R^2\|\nabla^2 u\|_{L^\infty(B_{\frac{R}{2}})} + R^{2+\alpha}[\nabla^2 u]_{C^\alpha(B_{\frac{R}{2}})} \\ &\leq C(|u|_{L^\infty(B_R)} + R^2|f|_{L^\infty(B_R)} + R^{2+\alpha}[f]_{C^\alpha(B_R)}), \end{aligned}$$

wobei $C > 0$ eine nur von n und α abhängten Konstante.

(Übung)

Korollar 4.15. *Sei B eine Kugel in $\mathbb{R}^n$ und $f \in C^\alpha(B)$ für ein $\alpha \in (0,1)$ mit $\|f\|_{C^\alpha(B)} < \infty$. Sei $u_k \in L^\infty(B) \cap C^2(B)$ eine Lösung von $\Delta u_k = f$ in B für $k = 1, 2, \cdots$, mit*

$$\sup_{k \geq 1} |u_k|_{L^\infty(B)} < \infty.$$

Dann existert eine Teilfolge $\{u_{k'}\}$ von $\{u_k\}$ und eine Funktion $u \in C^{2,\alpha}(B)$, so dass $u_{k'}$ gegen u in C^2 in jeder kompakten Teilmenge $K \subset B$ konvergiert und $\Delta u = f$ in B.

Beweis. Setze $M = \sup_{k\geq 1} \|u_k\|_{L^\infty(B)}$. Nach Theorem 4.13 und Bemerkung 4.12, gilt $u_k \in C^{2,\alpha}(B)$ und für jede $B' \subset\subset B$

$$\|u_k\|_{C^{2,\alpha}(B')} \leq C\{M + \|f\|_{C^\alpha(B)}\},$$

wobei C nur von B, B', u und α abhängt. Es folgt, dass die zweite Ableitungen von $\{u_k\}$ gleichgradig stetig in aller kompakten Teilmenge von B sind. ($\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ so dass $|u_k(x) - u_k(x)| < \varepsilon$ für alle $x, y \in K$ mit $|x - y| < \delta$.) Nach dem Satz von Arzela-Ascoli und dem Diagonalfolgenargument können wir eine Teilfolge $\{u_{k'}\}$ finden, die gegen eine Funktion $u \in C^2(B)$ in C^2 in jeder kompakten Teilmenge $K \subset B$ konvergiert, und zwar $\Delta u = f$ in B. □

Mit dieser Abschützungen und Theorem 3.13 können wir das Randwertproblem für die Poissongleichung in jeder Kugel B lösen.

Theorem 4.16. *Sei B eine Kugel in $\mathbb{R}^n$. Dann für alle $f \in C^\alpha(B)$ mit $\|f\|_{C^\alpha(B)} < \infty$ für ein $\alpha \in (0,1)$ und für alle $\varphi \in C(\partial B)$, existert es eine (eindeutige) Lösung $u \in C^\alpha(\overline{B}) \cap C^{2,\alpha}(B)$ von des Dirichletproblems*

$$\begin{aligned} \Delta u &= f \quad \text{in } B \\ u &= \varphi, \quad \text{auf } \partial B. \end{aligned}$$

Beweis. Sei w das Newtonpotential von f für das Gebiet B. Nach Lemma 4.9 ist $w \in C^\alpha(\overline{B}) \cap C^{2,\alpha}(B)$ und gilt $\Delta w = f$ in B. Berachte

$$\begin{aligned} \Delta v &= 0 \quad \text{in } B \\ u &= \varphi - w, \quad \text{auf } \partial B. \end{aligned}$$

Theorem 3.13 impliziert die Existenz von $v \in C(\overline{B}) \cap C^\infty(B)$. Dann $u = v + w$ is die gewünschte Lösung. □

Die Funktion f können auch unbeschränkt sein.

Theorem 4.17. *Sie B eine Kugel in $\mathbb{R}^n$ und $f \in C^\alpha(B)$ für ein $\alpha \in (0,1)$ mit*

$$\sup_{x \in B} d_x^{2-\beta} |f(x)| < \infty,$$

Dann existiert eine Lösung $u \in C(\overline{B}) \cap C^{2,\alpha}(B)$ von dem Randwertproblem

$$\begin{aligned} \Delta u &= f, \quad \text{in } B, \\ u &= 0, \quad \text{auf } \partial B. \end{aligned}$$

Beweis. Für jede $m \in \mathbb{N}$ setze

$$f_m = \begin{cases} m, & \text{falls } f \geq m, \\ f & \text{falls } |f| \leq m, \\ -m, & \text{falls } f \leq -m \end{cases}$$

Da f_m beschränkt ist, nach Bemerkung 4.11 können Lemma 4.9 anwenden und erhalten die Lösung $u_m \in C(\overline{B}) \cap C^{2,\alpha}(B)$ von

$$\begin{aligned} \Delta u_m &= f_m, \quad \text{in } B, \\ u_m &= 0, \quad \text{auf } \partial B. \end{aligned}$$

Nach Lemma 4.3 gilt

$$\sup_{x \in B} d_x^{-\beta} |u_m(x)| \leq C \sup_{x \in B} d_x^{2-\beta} |f_m(x)| \leq C \sup_{x \in B} d_x^{2-\beta} |f(x)|.$$

Sei $B = B_R$ und betachte eine monoton steigende Folge $r_k \to R$ mit $|f| \leq k$ in B_{r_k}. Also ist $\{u_m\}$ in B_{r_k} gleichmäßig beschränkt und gerfüllt die Gleichung $\Delta u_m = f$ in B_{r_k}. Nach Korollar 4.15 existiert eine Teilfolge von $\{u_m\}$ in jeder kompakten Teilmenge von B_{r_k}. Beim Diagonalfolgenargument finden wir eine Teilfolge von $\{u_m\}$, die gegen eine Funktion $u \in C^{2,\alpha}(B)$ bzgl. der C^2-Norm. Daraus gilt $\Delta u = f$ in B und

$$\sup_{x \in B} d_x^{-\beta} |u(x)| \leq C \sup_{x \in B} d_x^{2-\beta} |f(x)|.$$

Also ist $u = 0$ auf ∂B.

□

Nun untersuchen wir die Regularität der Lösungen am Rand. Für $R > 0$ setzen wir

$$B_R^+ := \{x \in B_R \subset \mathbb{R}^n \,|\, x_n > 0\}$$

und

$$\Sigma_R := \partial B_R^+ \cap \{x_n = 0\} = \{x \in B_R \subset \mathbb{R}^n \,|\, x_n = 0\}.$$

Lemma 4.18. *Sei $f \in L^\infty \cap C^\alpha(B_1^+ \cup \Sigma_1)$ für ein $\alpha \in (0,1)$. Ist $u \in L^\infty(B_1^+) \cap C^2(B_1^+)$ eine Lösung von $\Delta u = f$ in B_1^+ und $u = 0$ auf Σ_1. Dann gilt $u \in C^{2,\alpha}(B_1^+ \cup \Sigma_1)$. Wieter gilt*

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}(B_{1/2}^+ \cup \Sigma_{1/2})} \le C\{\|u\|_{L^\infty(B_1^+)} + \|f\|_{C^\alpha(B_1^+ \cup \Sigma_1)}\},$$

wobei $C > 0$ nur von n und α abhängt.

Beweis. Der Beweis ist änhlich wie den Beweis von Lamma 4.8 und 4.9. Sei w das Newtonpotential von f in B_1^+. Die Darstellungsformel für $\partial_{ij} w$ gilt. Wir beobachten, dass für $i \emptyset n$

$$\int_{\Sigma_1} \partial_j \Gamma(x,y) \nu_i(y) = 0,$$

da $\ni_i = 0$ auf Σ_1. Dann können wir die Abschätzung für $\partial_{ij} w$ für $i \not n$ oder $j \not n$ ganz gleich wie in den Beweis von Lamma 4.9 zeigen. Die Abschätzung für $\partial_{nn} w$ folgt von der Gleichung $\Delta u = f$, und zwar von

$$\partial_{nn} w = f - \sum_{k=1}^{n-1} \partial_{kk} w.$$

□

Theorem 4.19. *Sie B eine Kugel in $\mathbb{R}^n$. Für jade $f \in C^\alpha(\overline{B})$ und $\psi \in C^{2,\alpha}(\overline{B})$ für ein $\alpha \in (0,1)$ existiert genau eine Lösung $u \in C^{2,\alpha}(\overline{B}))$ von dem Randwertproblem*

$$\begin{aligned} \Delta u &= f, && \text{in } B, \\ u &= \varphi, && \text{auf } \partial B. \end{aligned}$$

Bemerkung 4.20. Der Satz gilt für alle $C^{2,\alpha}$ Gebiete.