4. Poisonn-Gelichung

In diesem Kapital untersuchen wir die Poisonn-Gelichung

$$-\Delta u = f$$

4.1. apriori Abschätzungen.

Lemma 4.1 (Eindeutigkeit). *Sei Ω ein beschränktes Gebiet in $\mathbb{R}^n$. Dann für jede $f \in C(\Omega)$ und $\varphi \in C(\partial\Omega)$, existiert maximal eine Lösung $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ von dem Randwertproblem*

$$\begin{cases} -\Delta u &= f, & \text{in } \Omega \\ u &= \varphi, & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

Theorem 4.2. *Sei Ω ein beschränktes Gebiet in $\mathbb{R}^n$, $f \in C(\overline{\Omega})$ und $\varphi \in C(\partial\Omega)$. Sei $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ eine Lösung von dem Randwertproblem*

$$\begin{cases} -\Delta u &= f, & \text{in } \Omega \\ u &= \varphi, & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

Dann gilt

$$\sup_{\Omega} |u| \leq \max_{\partial\Omega} |\varphi| + C \sup_{\Omega} |f|,$$

wobei C eine positive Konstante ist, die nur von n und $\operatorname{diam}(\Omega)$ abhängt.

Beweis. Setze $F = \sup_{\Omega} |f|$ und $\Phi = \max_{\partial\Omega} |\varphi|$. Dann gilt

$$\begin{cases} -\Delta(\pm u) &= \pm f \leq F, & \text{in } \Omega \\ \pm u &= \pm\varphi \leq \Phi, & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

OBdA können wir annehmen, dass $\Omega \subset B_R$ für ein $R > 0$. Setze

$$v(x) = \Phi + \frac{F}{2n}(R^2 - |x|^2), \qquad \forall x \in \Omega.$$

Dann erhalten wir

$$\begin{cases} -\Delta v &= -F, & \text{in } \Omega \\ v &\geq 0, & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

Betrachte $w_\pm = \pm u - v$. Wir haben

$$\begin{cases} -\Delta w_\pm &\leq 0, & \text{in } \Omega \\ w_\pm &\leq \Phi, & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

Nach Satz 2.25 gilt

$$w_\pm \leq 0 \quad \text{in } \Omega,$$

bzw

$$|u(x)| \leq v = \Phi + \frac{F}{2n}(R^2 - |x|^2) \leq \Phi + \frac{R^2}{2n}F, \quad \forall x \in \Omega.$$

□

Mit zusätzlicher Bedingungen vom Rand, können wir die Abschätzung verbersern. Für jede Kugel B in $\mathbb{R}^n$, dfeinieren wir

$$d_x := \operatorname{dist}(x, \partial B).$$

Lemma 4.3. *Sei $f \in C(B)$ mit*
$$\sup_{x\in B} d_x^{2-\beta}|f(x)| < \infty,$$
für ein $\beta \in (0,1)$. Sei $u \in C(\overline{B}) \cap C^2(B)$ eine Lösung von
$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \text{in } \Omega \\ u = 0, & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$
Dann gilt
$$\sup_B d_x^{-\beta}|u(x)| \le C \sup_B d_x^{2-\beta}|f(x)|, \qquad \forall x \in B,$$
wobei $C > 0$ nur von n und β abhängt.

Beweis. OBdA, nehmen wir $B = B_R$ und
$$N := \sup_{x\in B_R} d_x^{2-\beta}|f(x)| < \infty.$$
Setze
$$v(x) = (R^2 - |x|^2)^\beta.$$
Eine direkte Berechung liefert
$$-\Delta v = 2\beta(R^2 - |x|^2)^{\beta-2}\{n(R^2 - |x|^2) + 2(1-\beta)|x|^2\}.$$
Für $|x| > R$, gilt
$$n(R^2 - |x|^2) + 2(1-\beta)|x|^2 \ge 2(1-\beta)(R^2 - |x|^2) + 2(1-\beta)|x|^2 = 2(1-\beta)R^2,$$
da $n \ge 2(1-\beta)$. Also, erhaten wir
$$\begin{aligned} -\Delta v &\ge 4\beta(1-\beta)R^2(R^2 - |x|^2)^{\beta-2} \\ &= \beta(1-\beta)R^\beta(R - |x|)^{\beta-2}\{4R^{2-\beta}(R + |x|)^{\beta-2}\} \\ &\ge \beta(1-\beta)R^\beta(R - |x|)^{\beta-2}, \end{aligned}$$
da
$$4R^2(R + |x|)^{\beta-2} = 4(1 + \frac{|x|}{R})^{\beta-2} > 1.$$
Wir bemerken, dass $d_x = R - |x|$ für $x \in B_R$. Dann haben wir
$$\begin{aligned} -\Delta(\pm u) &= \pm f \le N d_x^{\beta-2} = N(R - |x|)^{\beta-2} \\ &= \{\beta(1-\beta)R^\beta\}^{-1} N\beta(1-\beta)R^\beta(R - |x|)^{\beta-2} \\ &\le \{\beta(1-\beta)R^\beta\}^{-1} N\Delta v. \end{aligned}$$
Es liefert
$$\begin{cases} -\Delta(\pm u - \{\beta(1-\beta)R^\beta\}^{-1}Nv) \le 0, & \text{in } B_R, \\ \pm u - \{\beta(1-\beta)R^\beta\}^{-1}Nv \le 0, & \text{auf } \partial B. \end{cases}$$
Nach Theorem 2.13 gilt
$$\pm u - \{\beta(1-\beta)R^\beta\}^{-1}Nv \le 0, \qquad \text{in } B.$$
Also
$$\begin{aligned} |u(x)| &\le \{\beta(1-\beta)R^\beta\}^{-1}Nv = \{\beta(1-\beta)R^\beta\}^{-1}N(R^2 - |x|^2)^\beta \\ &= 2\{\beta(1-\beta)\}^{-1}N(R - |x|)^\beta \frac{R^{-\beta}(R + |x|)^\beta}{2} \le 2\{\beta(1-\beta)\}^{-1}N(R - |x|)^\beta \\ &= \frac{2}{\beta(1-\beta)} N d_x^\beta. \end{aligned}$$
□

Bemerkung 4.4. Wir haben einige Bemerkungen über Theorem 4.2 und Lemma 4.3.

(1) Wir nennen die Abschätzungen in Theorem 4.2 und Lemma 4.3 *apriori Abschätzungen*. Das heißt, wir nehemen an, dass die Lösung schon existiert, und dann wir die passende Norm von der Lösung durch vorgegebenen Datei herleiten. Die apriori Abschätzungen herzuleiten ist der erste Schritt für die Untersuchung der Existenz der Lösungen einer partiellen Differentialgleichung.
(2) Eine passende Norm für die Abschätzungen zufinden ist auch sehr wichtig. Sehen Sie das folgende Beispiel.

Beispiel 4.5. Sei f eine Funktion in $B_1 \subset \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x_2^2 - x_1^2}{|x|^2} \left\{ \dfrac{2}{(-\log|x|)^{1/2}} + \dfrac{1}{4(-\log|x|)^{3/2}} \right\}, & \forall x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Dann ist f stetig in B_1. Betrachte

$$-\Delta u = f \qquad \text{in } B_1. \tag{4.1}$$

Definiere

$$u(x) = -\begin{cases} (x_1^2 - x_2^2)(-\log|x|)^{1/2}, & \forall x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Dann gilt $u \in C(B_1) \cap C^\infty(B_1 \backslash \{0\})$. Eine direkte Berechnung zeigt, dass u die Gleichung $-\Delta u = f$ in $B_1 \backslash \{0\}$ erfüllt und

$$\lim_{x \to 0} u_{x_1 x_1}(x) = \infty.$$

Also, u ist nicht in $C^2(B_1)$. Nun wir zeigen, dass (4.1) für diese gewählte stetige Funktion f keine C^2 Lösung besitzt. Angenommen, dass $v \in C^2(B_1)$ eine Lösung von (4.1) ist. Für ein feste $R \in (0,1)$ ist $w := u - v$ harmonisch in $B_R \backslash \{0\}$. Da $u \in C(\overline{B}_R)$ und $v \in C^2(\overline{B}_R)$, ist w stetig in B_R. Nach Theorem 3.16 ist w harmonisch und dann C^2 in B_1. Insbesondere ist u auch C^2 in B_1, ein Widerspruch. □

4.2. Hölder-Normen und Potentialtheoetische Abschätzungen.

Definition 4.6 (Hölder-stetigkeit, Hölder-Norm)**.** Sei $\Omega \subset \mathbb{R}$ offen und $0 < \alpha \leq 1$. Eine Abbildung (Funktion) $f : \Omega \to \mathbb{R}$ heißt Hölder-stetig zum Exponenten α genau dann, wenn eine positive reelle Zahl C existiert, so dass für alle $x, y \in \Omega$ gilt:

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^\alpha.$$

Wir bezeichnen den Raum der Hölder-stetigen Funktionen zum Exponenten α mit $C^\alpha(\overline{\Omega})$. Sei $k \geq 0$ eine ganze Zahl und $0 < \alpha \leq 1$. Sei Ω ein beschränktes Gebiet mit $C^{k,\alpha}$ Rand. Der Raum $C^{k,\alpha}(\Omega)$ ist die Menge der Funktionen definiert durch

$$C^{k,\alpha}(\overline{\Omega}) := \left\{ u \in C^k(\overline{\Omega}) \,|\, D^\beta u \in C^\alpha(\overline{\Omega}), \quad \forall \beta \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^n \text{ mit } |\beta| = k \right\}$$

Wir definieren

$$[u]_{C^\alpha(\overline{\Omega})} := \sup \left\{ \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\alpha} \;\middle|\; x, y \in \Omega, x \neq y \right\}$$

Man kann zeigen, dass $C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$, versehen mit der Norm

$$\|u\|_{C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})} := \|u\|_{C^k} + \sum_{\beta \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^n, |\beta| = k} [D^\beta]_{C^\alpha(\overline{\Omega})},$$

ein Banachraum ist. Hierbei ist

$$\|u\|_{C^k(\overline{\Omega})} = \sum_{i=0}^{k} \sum_{\beta \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^n, |\beta| = k} \sup_\Omega |D^\beta u|$$

die Norm von $C^k(\overline{\Omega})$. Wann $k = 0$, wir bezeichen $C^{0,\alpha}$ mit C^α und die Norm für C^α ist

$$\|u\|_{C^\alpha} = \|u\|_{C^0} + [u]_{C^\alpha}.$$

Definition 4.7 (das Newton-Potential)**.** Sei Ω ein offenes, beschränktes Gebiet, und sei f stetig in Ω. Die Newton-Potentielle von f in Ω ist definiert durch

$$w(x) = \int_\Omega \Gamma(x-y)f(y)dy,$$

wobei Γ die Fundamentallösung ist.

Es ist leicht to zeigen, dass w wohl-definiert und stetig ist.

Lemma 4.8. *Sei $\Omega = B_1$ die Einheitskugel in $\mathbb{R}^n$, f stetig in B_1 und w die Newton-Potentielle von f in B_1. Dann gilt $w \in C^1(\mathbb{R}^n)$ und für jede $x \in \mathbb{R}^n$ und $i = 1, 2, \cdots, n$ gilt*

$$\partial_i w(x) = \int_{B_1} \partial x_i \Gamma(x-y)f(y)dy.$$

Weiter gilt

$$|w|_{C^1(\overline{B}_1)} \le C|f|_{L^\infty(B_1)},$$

für eine Konstante $C > 0$, die nur von n abhängt.

Beweis. Setze

$$v_i(x) := \int_{B_1} \partial_{x_i}\Gamma(x-y)f(y)dy.$$

v_i ist wohl-definiert and stetig in $\mathbb{R}^n$. Wir sollen $v_i = \partial_i w$ zeigen. Wähle wir eine Abschneid-Funktion $\eta \in C^1(\mathbb{R})$ mit $0 \le eta \le 1$, $0 \le \eta' \le 2$, $\eta(t) = 0$ für $t \le 1$ und $\eta(t) = 1$ für $t \ge 2$. Für beliebige $\varepsilon > 0$ definiere

$$w_\varepsilon(x) = \int_{B_1} \Gamma\eta_\varepsilon f(y)dy,$$

wobei $\Gamma = \Gamma(x-y)$ und $\eta_\varepsilon = \eta(|x-y|/\varepsilon)$. Man kann leicht zeigen, dass $w_\varepsilon \in C^1(\mathbb{R}^n)$ und

$$\partial_i w_\varepsilon(x) = \int_{B_1} \partial_i(\eta_\varepsilon\Gamma)f(y)dy,$$

da $\eta_\varepsilon\Gamma$ in $\mathbb{R}^n$ glatt ist. Es liefert

$$v_i(x) - \partial_i w(x) = \int_{B_1} \partial_i(1-\eta_\varepsilon\Gamma)f(y)dy$$

Da die Intergrand Null ist für $|x-y| \ge 2\varepsilon$, erhalten wir

$$|v_i(x) - \partial_i w(x)| \le \sup|f| \int_{|x-y|\le 2\varepsilon} (|\partial_i\Gamma| + \frac{2}{\varepsilon}|\Gamma|)dy.$$

Eine direkte Berechnung liefert

$$|v_i(x) - \partial_i w(x)| \le \frac{2n\varepsilon}{n-2}\sup|f|, \qquad \text{für } n \ge 3$$

und

$$|v_i(x) - \partial_i w(x)| \le 4\varepsilon(1 + |\log 2\varepsilon|)\sup|f|, \qquad \text{für } n = 2.$$

Dies zeiget, dass w_ε und $\partial_i w_\varepsilon$ gegen w und u_i gleichmäßig in Kompaktum in $\mathbb{R}^n$ konvergieren. Es folgt, dass $\partial_i w = v_i$. □

Weiter wollen wir fragen, ob $w \in C^2$. Da $D^2\Gamma$ nicht integrabel ist, knnen wir ohne zusätzliche Bedingung an f dies nicht zeigen.

Lemma 4.9. *Sei $\Omega = B_1$ die Einheitskugel in $\mathbb{R}^n$, $f \in L^\infty(B_1) \cap C^\alpha(B_1)$ für ein $\alpha \in (0,1)$ und w die Newton-Potentielle von f in B_1. Dann gilt $w \in C^{2,\alpha}(B_1) \cap C(\overline{B_1})$ und*

$$\Delta w = f \qquad \text{in } B_1.$$

Weiter gilt

$$|w|_{C^{2,\alpha}(\overline{B}_{1/2})} \le C|f|_{C^\alpha(B_1)},$$

für eine Konstante $C > 0$, die nur von n und α abhängt.

Beweis. Schritt 1. $w \in C^2(B_1)$ und für $x \in B_1$ unf $i, j = 1, 2, \cdots, n$, gilt

$$\partial_{ij} w(x) = \int_{B_1} \partial_{x_i x_j} \Gamma(x-y)\{f(y) - f(x)\} dy - f(x) \int_{\partial B_1} \partial_{x_j} \Gamma(x-y) \nu_i(y)\, dS_y. \tag{4.2}$$

Sezte

$$v_{ij}(x) := \int_{B_1} \partial_{x_i x_j} \Gamma(x-y)\{f(y) - f(x)\} dy - f(x) \int_{\partial B_1} \partial_{x_j} \Gamma(x-y) \nu_i(y)\, dS_y.$$

Da f Hölder-stetig ist, ist v_{ij} wohl-definiert in B_1. Für beliebige $\varepsilon > 0$ definiere

$$v_{i,\varepsilon}(x) := \int_{B_1} \partial_i \Gamma \eta_\varepsilon f(y) dy,$$

wobei $\Gamma = \Gamma(x-y)$, $\eta_\varepsilon = \eta(|x-y|/\varepsilon)$ und η im Beweis von Lemma 4.8 gegeben ist. Es sit klar, dass $v_{i,\varepsilon} \in C^1(B_1)$. Beim Ableiten von $v_{i,\varepsilon}$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
\partial_j v_{i,\varepsilon}(x) &= \int_{B_1} \partial_j (\partial_i \Gamma \eta_\varepsilon) f(y) dy \\
&= \int_{B_1} \partial_j (\partial_i \Gamma \eta_\varepsilon) \{f(y) - f(x)\} dy + f(x) \int_{B_1} \partial_j (\partial_i \Gamma \eta_\varepsilon) dy \\
&= \int_{B_1} \partial_j (\partial_i \Gamma \eta_\varepsilon) \{f(y) - f(x)\} dy - f(x) \int_{B_1} \partial_i \Gamma \nu_i \, dS_y,
\end{aligned}$$

für hinreichend kleine ε. Es folgt

$$\begin{aligned}
|v_{ij}(x) - \partial_j v_{i,\varepsilon}(x)| &= \int_{B_1} \partial_j [(1-\eta_\varepsilon) \partial_i \Gamma] \{f(y) - f(x)\} |dy \\
&\le \int_{|y-x| \le 2\varepsilon} |\partial_j (1-\eta_\varepsilon) \partial_i \Gamma| f(y) - f(x)| dy \\
&\le [f]_{\alpha,x} \int_{|y-x| \le 2\varepsilon} \left(|\partial_{ij} \Gamma| + \frac{2}{\varepsilon} |\partial_i \Gamma| \right) |y-x|^\alpha dy \\
&\le \left(\frac{n}{\alpha} + 4 \right) [f]_{\alpha,x} (2\varepsilon)^\alpha,
\end{aligned}$$

wenn $|x| < 1 - 2\varepsilon$. Daraus gilt dass $\partial_j v_{i,\varepsilon}$ gegen v_{ij} gleichmäßig in aller kompakten Teilmenge in B_1 konvergiert, als $\varepsilon \to 0$. Da $u_{i,\varepsilon}$ gegen $\partial_i w$ gleichmäßig in B_1 konvergiert, gilt $w \in C^2(B_1)$ und $v_{ij} = \partial_{ij} w$. Wir haben (4.2) bewiesen.

Aus (4.2) erhalten wir

$$\begin{aligned}
\Delta w &= \sum_i \int_{B_1} \partial_{x_i x_i} \Gamma(x-y)\{f(y) - f(x)\} dy - f(x) \int_{\partial B_1} \partial_{x_i} \Gamma(x-y) \nu_i(y)\, dS_y \\
&= \int_{B_1} \Delta_x \Gamma(x-y)\{f(y) - f(x)\} dy + f(x) \int_{\partial B_1} \frac{\partial \Gamma}{\partial \nu_y}(x-y)\, dS_y.
\end{aligned}$$

Denn wir haben $\partial_{x_i} \Gamma(x-y) = -\partial_{y_i} \Gamma(x-y)$. Da $\Delta_x \Gamma(x-y) = 0$ für alle $y \neq x$, gilt

$$\Delta w(x) = f(x).$$

Denn nach Bemerkung 3.12 gilt $\int_{\partial B_1} \frac{\partial \Gamma}{\partial \nu_y}(x-y)\, dS_y = 1$.

Schritt 2. Nun zeigen wir die innere $C^{2,\alpha}$-Abschätzung von w. Für $x \in B_{1/2}$, aus (4.2) erhalten wir

$$\begin{aligned}
|\partial_{ij} w(x)| &\le C\{|f(x)| \int_{\partial B_1} |y-x|^{1-n} dS_y + [f]_{\alpha,x} \int_{B_1} |y-x|^{\alpha-n} dy\} \\
&\le C\{|f(x)| + [f]_{\alpha,x}\} \le C\{|f(x)| + [f]_\alpha\}.
\end{aligned} \tag{4.3}$$

Denn $|x-y| \ge 1/2$ für alle $x \in B_{1/2}$ und $y \in \partial B_1$.

Für bliebge andere $\bar{x} \in B_{1/2}$ setze $r = |x - \bar{x}|$. Nach (4.2) haben wir

$$\partial_{ij} w(\bar{x}) = \int_{B_1} \partial_{x_i x_j} \Gamma(\bar{x} - y)\{f(y) - f(\bar{x})\} dy - f(\bar{x}) \int_{\partial B_1} \partial_{x_j} \Gamma(\bar{x} - y) \nu_i(y)\, dS_y.$$

Falls $r \geq 1/4$, mit der Abschätzung (4.3) erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{|\partial_{ij} w(x) - \partial_{ij} w(\bar{x})|}{|x - \bar{x}|^\alpha} &\leq \frac{1}{r^\alpha}\{|\partial_{ij} w(x)| + |\partial_{ij} w(\bar{x})|\} \\ &\leq C\{|f(x)| + |f(\bar{x})| + [f]_{\alpha,x} + [f]_{\alpha,\bar{x}}\} \leq C\{|f(x)| + |f(\bar{x})| + [f]_\alpha\}, \end{aligned}$$

da (4.3) für $\partial_{ij} w(\bar{x})$ auch gilt. Nun brachten wir den Fall $r \leq 1/4$. Setze $\hat{x} = (x + \bar{x})/2$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \partial_{ij} w(x) - \partial_{ij} w(\bar{x}) &= \int_{B_1} \partial_{x_i x_j} \Gamma(x - y)\{f(y) - f(x)\} dy - \int_{B_1} \partial_{x_i x_j} \Gamma(\bar{x} - y)\{f(y) - f(\bar{x})\} dy \\ &\quad - \left\{ f(x) \int_{\partial B_1} \partial_{x_j} \Gamma(x - y) \nu_i(y)\, dS_y - f(\bar{x}) \int_{\partial B_1} \partial_{x_j} \Gamma(\bar{x} - y) \nu_i(y)\, dS_y \right\} \\ &= I_3 + I_4 + I_5 + I_6 + I_1 + I_2, \end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned} I_1 &= -f(x) \int_{\partial B_1} \{\partial_i \Gamma(x - y) - \partial_i \Gamma(\bar{x} - y)\} \nu_i(y)\, dS_y, \\ I_2 &= -\{f(x) - f(\bar{x})\} \int_{\partial B_1} \partial_i \Gamma(\bar{x} - y)\} \nu_i(y)\, dS_y, \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} I_3 &= -\int_{B_r(\hat{x})} \partial_{ij} \Gamma(x - y)\{f(x) - f(y)\}\, dy, \\ I_4 &= -\int_{B_r(\hat{x})} \partial_{ij} \Gamma(\bar{x} - y)\{f(y) - f(\bar{x})\}\, dy, \\ I_5 &= -\{f(x) - f(\bar{x})\} \int_{B_1 \setminus B_r(\hat{x})} \partial_{ij} \Gamma(x - y)\, dy, \\ I_6 &= -\int_{B_1 \setminus B_r(\hat{x})} \{\partial_{ij} \Gamma(x - y) - \partial_{ij} \Gamma(\bar{x} - y)\}\{f(\bar{x}) - f(x)\}\, dy. \end{aligned}$$

Für I_1 benutzen wir dem Mittelwertsatz

$$\begin{aligned} \left| \int_{\partial B_1} \{\partial_i \Gamma(x - y) - \partial_i \Gamma(\bar{x} - y)\} \nu_i(y) \right| &\leq |x - \bar{x}| \int_{\partial B_1} |\nabla \partial_i \Gamma(\tilde{x} - y)|\, dS_y \\ &\leq C|x - \bar{x}|, \end{aligned}$$

wobei $\tilde{x}$ ein Punkt im der Gerade von x nach $\bar{x}$ ist. Wir haben in der zweiten Ungleichung die Abschätzung $|\nabla \partial_i \Gamma(\tilde{x} - y)| \leq C$ benutzt, da $|y - \tilde{x}| \geq 1/2$ für alle $y \in \partial B_1$. Für I_2 haben wir

$$\left| \int_{\partial B_1} \partial_i \Gamma(\bar{x} - y) \nu_i(y)\, dS_y \right| \leq C.$$

Für I_3 haber wir

$$\begin{aligned} |I_3| &\leq \int_{B_r(\hat{x})} |\partial_{ij} \Gamma(x - y)\{f(x) - f(y)\}|\, dy \\ &\leq [f]_{\alpha,x} \int_{B_{3r/2}(\hat{x})} |x - y|^{\alpha - n} dy \\ &\leq C[f]_{\alpha,x} r^\alpha = C[f]_{\alpha,x} |x - \bar{x}|^\alpha \\ &\leq C[f]_\alpha |x - \bar{x}|^\alpha. \end{aligned}$$

Analog erhalten wir

$$|I_4| \leq C[f]_{\alpha,\bar{x}} |x - \bar{x}|^\alpha \leq C[f]_\alpha |x - \bar{x}|^\alpha.$$

Für I_5 haben wir

$$\begin{aligned}\left|\int_{B_1\setminus B_r(\hat{x})}\partial_{ij}\Gamma(x-y)\,dy\right| &= \left|\int_{\partial(B_1\setminus B_r(\hat{x}))}\partial_i\Gamma(x-y)\nu_j\,dS_y\right|\\ &\le \int_{\partial B_1}|\partial_i\Gamma(x-y)|\,dS_y+\int_{\partial B_r(\hat{x})}|\partial_i\Gamma(x-y)|\,dS_y\\ &\le C+\frac{C}{r^{n-1}}\int_{\partial B_r(\hat{x})}dS_y\le C.\end{aligned}$$

Schließlich, für I_6 benutzen wir noch dem Mittelwertsatz

$$|\partial_{ij}\Gamma(x-y)-\partial_{ij}\Gamma(\bar{x}-y)|\le|\nabla\partial_{ij}\Gamma(\tilde{x}-y)|\le C\frac{|x-\tilde{x}|}{|\tilde{x}-y|^{n+1}},$$

wobei $\tilde{x}$ ein Punkt im der Gerade von x nach $\bar{x}$ ist. Also haben wir

$$\begin{aligned}|I_6| &\le C|x-\bar{x}|\int_{B_1\setminus B_r(\hat{x})}\frac{1}{|\tilde{x}-y|^{n+1}}|f(\bar{x})-f(x)|\,dy\\ &\le Cr[f]_{\alpha,\bar{x}}\int_{|y-\hat{x}|\ge r}\frac{|\bar{x}-y|^\alpha}{|\tilde{x}-y|^{n+1}}\,dy.\end{aligned}$$

Es ist leich nachzuprüfen, dass $|\bar{x}-y|\le 3|\hat{x}-y|/2\le 3|\tilde{x}-y|$ für alle $y\in\partial B_1$. Damit gilt

$$\begin{aligned}|I_6| &\le Cr[f]_{\alpha,\bar{x}}\int_{|y-\hat{x}|\ge r}|\hat{x}-y|^{\alpha-n-1}\,dy\\ &\le Cr^\alpha[f]_{\alpha,\bar{x}}=C|x-\bar{x}|^\alpha[f]_{\alpha,\bar{x}}\\ &\le C|x-\bar{x}|^\alpha[f]_\alpha.\end{aligned}$$

Es liefert

$$|\partial_{ij}w(x)-\partial_{ij}w(\bar{x})|\le C(|f|_{L^\infty(B)}+[f]_{\alpha,x}+[f]_{\alpha,\bar{x}})|x-\bar{x}|^\alpha\le C(|f|_{L^\infty(B)}+[f]_\alpha)|x-\bar{x}|^\alpha$$

und die gewünschte Abschätzung

$$\|w\|_{C^{2,\alpha}(B_{1/2})}\le C\|f\|_{C^\alpha(B_1)}.$$

□

Definition 4.10. (1) $f:D\to\mathbb{R}$ heißt *hölderstetig* an $x_0\in D$, falls

$$[f]_{\alpha,x_0}:=[f]_{C^\alpha,x_0}:=[f]_{C^\alpha,x_0,D}:=\sup_{x\in D}\frac{|f(x)-f(x_0)|}{|x-x_0|^\alpha}<\infty.$$

(2) $f:D\to\mathbb{R}$ heißt *gleichmäßig hölderstetig* in D, falls

$$[f]_{C^\alpha}=[f]_{C^\alpha,D}:=\sup_{x,y\in D}\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha}<\infty.$$

(3) $f:D\to\mathbb{R}$ heißt *lokal hölderstetig* in D, falls f gleichmäßig hölderstetig in jeder kompakten Teilmenge von D.

Ist f lokal hölderstetig in einer kompakten Menge D, dann ist f punktweise hölderstetig in D, d.h., f an jeden Punkt $x\in D$ hölderstetig ist. Für offene Menge D gilt dies nicht immer. Es gilt, falls f zutätzlich beschränkt in D ist.

Bemerkung 4.11. In den Beweis von Lemma labellem4.9 erhalten wir die folgende Abschätzung

$$\|w\|_{C^{2,\alpha}(\overline{B}_{1/2})}\le C\sup_{x\in\overline{B}_{1/2}}[f]_{\alpha,x,B_1}.$$

Bemerkung 4.12. Statt B_1 und $B_{\frac{1}{2}}$ gilt Lemma 4.9 auch für bliebiges beschränktes C^1-Gebiet Ω und $\Omega'\subset\subset\Omega$. (Übung)

Nun untersuchen wir bliebige Lösungen von der Poisson-Gleichung.

Theorem 4.13. *Sei $f \in C^\alpha(B_1)$ für ein $\alpha \in (0,1)$ mit $\|f\|_{C^\alpha(B_1)} < \infty$. Sei $u \in L^\infty(B_1) \cap C^2(B_1)$ eine Lösung von $\Delta u = f$ in B_1. Dann $u \in C^{2,\alpha}(B_1)$. Weiter gilt*

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}(B_{\frac{1}{2}})} \le C(|u|_{L^\infty(B_1)} + |f|_{C^\alpha(B_1)}),$$

wobei $C > 0$ eine nur von n und α abhängten Konstante.

Beweis. Sei w das Newtonpotential von f in B_1. Nach Lemma 4.8 gilt

$$\|w\|_{C^1(B_1)} \le C\|f\|_{L^\infty(B_1)}.$$

Nach Lemma 4.9 ist $w \in C^{2,\alpha}(B_1)$ und eine Lösung von $\Delta u = f$. Weiter gilt

$$\|w\|_{C^{2,\alpha}(B_{\frac{1}{2}})} \le C\|f\|_{C^\alpha(B_1)}.$$

Setze $v = u - w$. Dann ist v harmonisch in B_1 und erhaten wir

$$\|v\|_{L^\infty(B_1)} \le \|u\|_{L^\infty(B_1)} + \|w\|_{L^\infty(B_1)} \le \|u\|_{L^\infty(B_1)} + C\|f\|_{L^\infty(B_1)}.$$

Höhere innere Abschätzungen von harmonischen Funktionen, Theorem 2.19, impliziert

$$\|v\|_{C^{2,\alpha}(B_{\frac{1}{2}})} \le \|v\|_{C^3(B_{\frac{1}{2}})} \le C\|v\|_{L^\infty(B_1)} \le \|u\|_{L^\infty(B_1)} + C\|f\|_{L^\infty(B_1)}.$$

Dann erhaten wir die gewünschten Abschätzung

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}(B_{\frac{1}{2}})} \le C(|u|_{L^\infty(B_1)} + |f|_{C^\alpha(B_1)}).$$

□

In allgemeinen haben wir die folgende Resultat durch Skalierung

Theorem 4.14. *Sei B_R eine Kugel in $\mathbb{R}^n$ mit Radius R, $f \in C^\alpha(B_R)$ für ein $\alpha \in (0,1)$ und $\|f\|_{C^\alpha(B_R)} < \infty$. Sei $u \in L^\infty(B_R) \cap C^2(B_R)$ eine Lösung von $\Delta u = f$ in B_R. Dann $u \in C^{2,\alpha}(B_R)$. Weiter gilt*

$$\begin{aligned} R\|\nabla u\|_{L^\infty(B_{\frac{R}{2}})} + R^2\|\nabla^2 u\|_{L^\infty(B_{\frac{R}{2}})} + R^{2+\alpha}[\nabla^2 u]_{C^\alpha(B_{\frac{R}{2}})} \\ \le C(|u|_{L^\infty(B_R)} + R^2|f|_{L^\infty(B_R)} + R^{2+\alpha}[f]_{C^\alpha(B_R)}), \end{aligned}$$

wobei $C > 0$ eine nur von n und α abhängten Konstante.

(Übung)

Korollar 4.15. *Sei B eine Kugel in $\mathbb{R}^n$ und $f \in C^\alpha(B)$ für ein $\alpha \in (0,1)$ mit $\|f\|_{C^\alpha(B)} < \infty$. Sei $u_k \in L^\infty(B) \cap C^2(B)$ eine Lösung von $\Delta u_k = f$ in B für $k = 1, 2, \cdots$, mit*

$$\sup_{k \ge 1} |u_k|_{L^\infty(B)} < \infty.$$

Dann existert eine Teilfolge $\{u_{k'}\}$ von $\{u_k\}$ und eine Funktion $u \in C^{2,\alpha}(B)$, so dass $u_{k'}$ gegen u in C^2 in jeder kompakten Teilmenge $K \subset B$ konvergiert und $\Delta u = f$ in B.

Beweis. Setze $M = \sup_{k \ge 1} \|u_k\|_{L^\infty(B)}$. Nach Theorem 4.13 und Bemerkung 4.12, gilt $u_k \in C^{2,\alpha}(B)$ und für jede $B' \subset\subset B$

$$\|u_k\|_{C^{2,\alpha}(B')} \le C\{M + \|f\|_{C^\alpha(B)}\},$$

wobei C nur von B, B', u und α abhängt. Es folgt, dass die zweite Ableitungen von $\{u_k\}$ gleichgradig stetig in aller kompakten Teilmenge von B sind. ($\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ so dass $|u_k(x) - u_k(x)| < \varepsilon$ für alle $x, y \in K$ mit $|x - y| < \delta$.) Nach dem Satz von Arzela-Ascoli und dem Diagonalfolgenargument können wir eine Teilfolge $\{u_{k'}\}$ finden, die gegen eine Funktion $u \in C^2(B)$ in C^2 in jeder kompakten Teilmenge $K \subset B$ konvergiert, und zwar $\Delta u = f$ in B. □

Mit dieser Abschützungen und Theorem 3.13 können wir das Randwertproblem für die Poissongleichung in jeder Kugel B lösen.

Theorem 4.16. *Sei B eine Kugel in $\mathbb{R}^n$. Dann für alle $f \in C^\alpha(B)$ mit $\|f\|_{C^\alpha(B)} < \infty$ für ein $\alpha \in (0,1)$ und für alle $\varphi \in C(\partial B)$, existert es eine (eindeutige) Lösung $u \in C^\alpha(\overline{B}) \cap C^{2,\alpha}(B)$ von des Dirichletproblems*

$$\begin{aligned} \Delta u &= f \quad && \text{in } B \\ u &= \varphi, && \text{auf } \partial B. \end{aligned}$$

Beweis. Sei w das Newtonpotential von f für das Gebiet B. Nach Lemma 4.9 ist $w \in C^\alpha(\overline{B}) \cap C^{2,\alpha}(B)$ und gilt $\Delta w = f$ in B. Berachte

$$\begin{aligned} \Delta v &= 0 \quad && \text{in } B \\ u &= \varphi - w, && \text{auf } \partial B. \end{aligned}$$

Theorem 3.13 impliziert die Existenz von $v \in C(\overline{B}) \cap C^\infty(B)$. Dann $u = v + w$ is die gewünschte Lösung. ☐

Die Funktion f können auch unbeschränkt sein.

Theorem 4.17. *Sie B eine Kugel in $\mathbb{R}^n$ und $f \in C^\alpha(B)$ für ein $\alpha \in (0,1)$ mit*

$$\sup_{x\in B} d_x^{2-\beta}|f(x)| < \infty,$$

Dann existiert eine Lösung $u \in C(\overline{B}) \cap C^{2,\alpha}(B)$ von dem Randwertproblem

$$\begin{aligned} \Delta u &= f, \quad && \text{in } B, \\ u &= 0, && \text{auf } \partial B. \end{aligned}$$

Beweis. Für jede $m \in \mathbb{N}$ setze

$$f_m = \begin{cases} m, & \text{falls } f \geq m, \\ f & \text{falls } |f| \leq m, \\ -m, & \text{falls } f \leq -m \end{cases}$$

Da f_m beschränkt ist, nach Bemerkung 4.11 können Lemma 4.9 anwenden und erhalten die Lösung $u_m \in C(\overline{B}) \cap C^{2,\alpha}(B)$ von

$$\begin{aligned} \Delta u_m &= f_m, \quad && \text{in } B, \\ u_m &= 0, && \text{auf } \partial B. \end{aligned}$$

Nach Lemma 4.3 gilt

$$\sup_{x\in B} d_x^{-\beta}|u_m(x)| \leq C \sup_{x\in B} d_x^{2-\beta}|f_m(x)| \leq C \sup_{x\in B} d_x^{2-\beta}|f(x)|.$$

Sei $B = B_R$ und betachte eine monoton steigende Folge $r_k \to R$ mit $|f| \leq k$ in B_{r_k}. Also ist $\{u_m\}$ in B_{r_k} gleichmäßig beschränkt und gerfüllt die Gleichung $\Delta u_m = f$ in B_{r_k}. Nach Korollar 4.15 existiert eine Teilfolge von $\{u_m\}$ in jeder kompakten Teilmenge von B_{r_k}. Beim Diagonalfolgenargument finden wir eine Teilfolge von $\{u_m\}$, die gegen eine Funktion $u \in C^{2,\alpha}(B)$ bzgl. der C^2-Norm. Daraus gilt $\Delta u = f$ in B und

$$\sup_{x\in B} d_x^{-\beta}|u(x)| \leq C \sup_{x\in B} d_x^{2-\beta}|f(x)|.$$

Also ist $u = 0$ auf ∂B.

☐

Nun untersuchen wir die Regularität der Lösungen am Rand. Für $R > 0$ setzen wir

$$B_R^+ := \{x \in B_R \subset \mathbb{R}^n \,|\, x_n > 0\}$$

und

$$\Sigma_R := \partial B_R^+ \cap \{x_n = 0\} = \{x \in B_R \subset \mathbb{R}^n \,|\, x_n = 0\}.$$

Lemma 4.18. *Sei $\Omega = B_1^+$ und $f \in L^\infty(B_1^+) \cap C^\alpha(B_1^+ \cup \Sigma_1)$ für ein $\alpha \in (0,1)$. Sei w wie in Definition 4.7 das Newtonpotential von f in B_1^+. Dann gilt $w \in C(B_1^+) \cap C^{2,\alpha}(B_1^+ \cup \Sigma_1)$ und $\Delta w = f$ in B_1^+. Weiter gilt*

$$\|w\|_{C^{2,\alpha}(B_{1/2}^+ \cup \Sigma_{1/2})} \leq C\|f\|_{C^\alpha(B_1^+ \cup \Sigma_1)},$$

wobei $C > 0$ nur von n und α abhängt.

Beweis. Der Beweis ist ähnlich wie den Beweis von Lamma 4.8 und 4.9. Sei w das Newtonpotential von f in B_1^+, d.h., $w(x) = \int_{B_1^+} \Gamma(x-y)f(y)dy$. Die Darstellungsformel für $\partial_{ij}w$ gilt. Wir beobachten, dass für $i \neq n$

$$\int_{\Sigma_1} \partial_j \Gamma(x,y)\nu_i(y) = 0,$$

da $\nu_i = 0$ auf Σ_1. Dann können wir die Abschätzung für $\partial_{ij}w$ für $i \neq n$ oder $j \neq n$ ganz gleich wie in den Beweis von Lamma 4.9 zeigen. Die Abschätzung für $\partial_{nn}w$ folgt von der Gleichung $\Delta u = f$, und zwar von

$$\partial_{nn}w = f - \sum_{k=1}^{n-1} \partial_{kk}w.$$

□

Theorem 4.19. *Sei $f \in L^\infty(B_1^+) \cap C^\alpha(B_1^+ \cup \Sigma_1)$ für ein $\alpha \in (0,1)$. Ist $u \in L^\infty(B_1^+) \cap C^2(B_1^+)$ eine Lösung von $\Delta u = f$ in B_1^+ und $u = 0$ auf Σ_1. Dann $u \in C^{2,\alpha}(B_1^+ \cup \Sigma_1)$. Weiter gilt*

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}(B_{1/2}^+ \cup \Sigma_{1/2})} \leq C\{\|u\|_{L^\infty(B_1^+)} + \|f\|_{C^\alpha(B_1^+ \cup \Sigma_1)}\},$$

wobei $C > 0$ nur von n und α abhängt.

Beweis. Nun sollen wir auf der Randbedingung $u = 0$ auf Σ_1 achten. Das Newtonpotential w, das in obigem Lemma untersucht wurd, erfüllt die Randbedingung i. A. nicht. Wir mussen das Newtonpotential w modifizieren.

Sei w das Newtonpotential von f für B_1^+, d.h., $w(x) = \int_{B_1^+} \Gamma(x-y)f(y)dy$. Nach Lemma 4.8 gilt

$$\|w\|_{C^1(\overline{B}_1^+)} \leq C\|f\|_{L^\infty(B_1^+)}.$$

Nach Lemma 4.18 gilt $w \in C(B_1^+) \cap C^{2,\alpha}(B_1^+ \cup \Sigma_1)$, $\Delta w = f$ in B_1^+ und

$$\|w\|_{C^{2,\alpha}(B_{1/2}^+ \cup \Sigma_{1/2})} \leq C\|f\|_{C^\alpha(B_1^+ \cup \Sigma_1)}.$$

Für $x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^n$ setze $x^* = (x', -x_n)$ und $B_1^- = B_1 \cap \{x_n < 0\}$. Für $x \in B_1^-$ setze

$$\tilde{f}(x) = f(x^*).$$

Es ist offentlich, dass $\tilde{f} \in L^\infty(B_1^-) \cap C^\alpha(B_1^- \cup \Sigma_1)$ mit $\|\tilde{f}\|_{C^\alpha(B_1^- \cup \Sigma_1)} = \|f\|_{C^\alpha(B_1^+ \cup \Sigma_1)}$. Sei $\tilde{w}$ das Newtonpotential von $\tilde{f}$ für B_1^-, d.h.,

$$\tilde{w}(x) = \int_{B_1^-} \Gamma(x-y)\tilde{f}(y)dy.$$

Wir wollen zeigen, dass

(1) die Funktion $\tilde{w}$ in $C^{2,\alpha}(B_1^+ \cup \Sigma_1)$ ist,
(2) die Gleichung $\Delta\tilde{w}(x) = f(x)$ in B_1^+ erfüllt,
(3) die Abschätzung $\|\tilde{w}\|_{C^1(\overline{B}_1^+)} \leq C\|f\|_{L^\infty(B_1^+)}$ erfüllt,
(4) die Abschätzung

$$\|\tilde{w}\|_{C^{2,\alpha}(B_{1/2}^+ \cup \Sigma_{1/2})} \leq C\|f\|_{C^\alpha(B_1^+ \cup \Sigma_1)}$$

besitzt

(3) folgt aus Lemma 4.8. Beachte dass das Integral von $\tilde{w}$ über B_1^- definiert ist und wir obigen Abschätzungen (Theorem 4.19) leider nicht direkt benutzen können. Also können wir (1), (2) und (4) nicht direkt beweisen.

Setze

$$f^*(x) = \begin{cases} f(x), & \text{falls } x \in \overline{B}_1^+, \\ \tilde{f}(x), & \text{falls } x \in B_1^-. \end{cases}$$

Es ist offentlich, dass $f^* \in C^\alpha(B_1)$ mit $\|\tilde{f}\|_{C^\alpha(B_1} \leq 2\|f\|_{C^\alpha(B_1^+ \cup \Sigma_1)}$. Betrachte das Newtonpotential w^* von f^* in B_1

$$w(x) = \int_{B_1} \Gamma(x-y) f^*(y)\, dy.$$

Nach Lemma 4.9, gilt $w^* \in C^{2,\alpha}(B_1)$, $\Delta w^* = f^*$ in B_1 und

$$\|w^*\|_{C^{2,\alpha}(B_{1/2})} \leq C\|f^*\|_{C^\alpha(B_1)} \leq C\|f\|_{C^\alpha(B_1^+)}.$$

Nun ist es leicht nachzuprüfen, dass $\tilde{w} = w^* - w$ in B_1^*. Die gewünschte Eigenschaften von $\tilde{w}$ in B_1^+ werden durch die Eigenschaften von w und w^* in B_1^+ bewiesen.

Nun betrachten wir

$$\begin{aligned} w_0 := w - \tilde{w} &= \int_{B_1^+} \Gamma(x-y) f(y)\, dy - \int_{B_1^-} \Gamma(x-y) f^*(y)\, dy \\ &= \int_{B_1^+} \big(\Gamma(x-y) - \Gamma(x-y^*)\big) f(y)\, dy. \end{aligned}$$

Die Funktion w_0 hat die Eigenschaften (1)-(4) und zusätzlich $w_0 = 0$ auf Σ_1.

Setze $v = u - w_0$. Es ist klar, dass v harmonisch in B_1^+, $v = 0$ auf Σ_1 und

$$\|v\|_{L^\infty(B_1^+)} \leq \|u\|_{L^\infty(B_1^+)} + \|w_0\|_{L^\infty(B_1^+)} \leq \|u\|_{L^\infty(B_1^+)} + C\|f\|_{L^\infty(B_1^+)}.$$

Da $v = 0$ auf Σ_1, benutzen wir das Schwarzsche Spiegelungsprinzip (Blatt 02, Aufgabe 2) und finden eine Fortsetzung von v

$$v^*(x) = \begin{cases} v(x), & \text{falls } x \in \overline{B}_1^+, \\ v(x, -x_n), & \text{falls } x \in B_1^-. \end{cases}$$

v^* ist harmonisch in B_1 und hat die Abschätzung

$$\|v^*\|_{C^{2,\alpha}(B_{1/2})} \leq C\|v\|_{L^\infty(B_1^+)} \leq C\{\|u\|_{L^\infty(B_1^+)} + \|f\|_{L^\infty(B_1^+)}\}.$$

Es folgt

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}(B_{1/2}^+ \cup \Sigma_{1/2})} \leq C\{\|u\|_{L^\infty(B_1^+)} + \|f\|_{L^\infty(B_1^+)}\}.$$

□

Theorem 4.20. *Sie B eine Kugel in $\mathbb{R}^n$. Für jade $f \in C^\alpha(\overline{B})$ und $\psi \in C^{2,\alpha}(\overline{B})$ für ein $\alpha \in (0,1)$ existiert genau eine Lösung $u \in C^{2,\alpha}(\overline{B}))$ von dem Randwertproblem*

$$\begin{aligned} \Delta u &= f, && \text{in } B, \\ u &= \varphi, && \text{auf } \partial B. \end{aligned}$$

Beweis. Nach Satz 4.16 existiert eine Lösung $u \in C(\overline{B}) \cap C^{2,\alpha}(B)$. Wir sollen $u \in C^{2,\alpha}(\overline{B})$ zeigen. OBdA können wir annemhen, dass $\varphi = 0$. Sonst betrachten wir $\tilde{=}u - \varphi$.

Durch eine Translation und eine Drehung können wir annehmen, dass B ist gegeben durch

$$|x'|^2 + (x_n - R)^2 = R^2.$$

Wir betrachten die Transformation

$$y = \frac{x}{|x|^2}.$$

Unter der Transformation, ist B auf $\Omega = \{y_n > 1/2\}$ und ∂B auf $\partial\Omega = \{y_n = 1/2\}$ abgebildet. Setze

$$v(y) = |x|^{n-2}u(x).$$

Dann gilt $v \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ und $v = 0$ auf $\partial\Omega$, da $u \in C(\overline{B}) \cap C^2(B)$ und $u = 0$ auf ∂B. Außerdem ist v in Ω harmonisch. (Blatt 03, Aufgabe 1) Denn gilt

$$\Delta_y v(y) = |y|^{-n-2}\Delta_x u(x).$$

Nach Satz 4.19 gilt $v \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$. Weil jeder Punkt als Ürsprung angenomhen werden kann, folgt $u \in C^{2,\alpha}(\overline{B})$.

□

Bemerkung 4.21. Der Satz gilt für alle $C^{2,\alpha}$ Gebiete.

5. Maximumprinzip

Das Maximumprinzip spielt eine wichtige Rolle in der elliptischen partiellen Differentialgleichungen.

5.1. **Schaches Maximumprinzip.**
In diesem Kapital, sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, untersuchen wir ein Operator under folgender Bedingungen:

Begingungen 5.1. *Sei a_{ij}, b_i und c beschränkte, stetige Funktion in Ω mit $a_{ij} = a_{ji}$. Wir untersuchen folgenden Operatoren*

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\partial_{ij}u + \sum_{i=1}^{n} b_i\partial_i u + cu \qquad \text{in } \Omega, \tag{5.1}$$

für $u \in C^2(\Omega)$.

Definition 5.2 (Elliptizität)**.** Der operator heißt *strikt elliptisch* in Ω, falls gilt

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\xi_i\xi_j \geq \lambda|\xi|^2 \qquad \text{für alle } x \in \Omega \text{ und } \xi \in \mathbb{R}^n, \tag{5.2}$$

für eine Konstante $\lambda > 0$. Die Konstante λ heißt die *elliptizitätskonstante.*

Der operator heißt *gleichmäßig elliptisch* in Ω, falls gilt

$$\lambda|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\xi_i\xi_j \leq \Lambda|\xi|^2 \qquad \text{für alle } x \in \Omega \text{ und } \xi \in \mathbb{R}^n, \tag{5.3}$$

für Konstante $\lambda > 0$ und $\Lambda > 0$.

Definition 5.3 (Sublösung)**.** Für eine stetige Funkiton f in Ω heißt eine C^2-Funktion u *Sublösung* oder *Unterlösung* von $-Lu = f$, falls

$$-Lu \leq f \quad \text{in } \Omega.$$

Für eine stetige Funkiton f in Ω heißt eine C^2-Funktion u *Superlösung* oder *Oberlösung* von $-Lu = f$, falls

$$-Lu \geq f \quad \text{in } \Omega.$$

Wir setzen $u^+ := \max\{u, 0\}$ die nicht-negative Teile von u.

Theorem 5.4 (Schwaches Maximumprinzip)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet in $\mathbb{R}^n$ und L ein strikt elliptischer Operator mit Bedingungen 5.1. Sei $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ eine Unterlösung, d.h., $-Lu \leq 0$ in Ω mit*

$$c \leq 0 \qquad \text{in } \Omega. \tag{5.4}$$

Dann nimmt u ihres nicht-negatives Maximum am Rand, d.h,

$$\max_{\overline{\Omega}} u \leq \max_{\partial\Omega} u^+.$$

Beweis. Schritt 1. Wir untersuchen erste den folgenden Fall:

$$-Lu < 0 \text{ in } \Omega.$$

Angenommen, dass u in $x_0 \in \Omega$ ihres nicht-positives maximum annimmt. Dann rehalten wir, dass $u(x_0) \geq 0$, $D_i u(x_0) = 0$ und die Hesse-Matrix $\nabla^2 u(x_0)$ negativ semi-definite ist. Da $A := (a_{ij}(x_0))$ nach der Voraussetzung positiv definite ist, gilt $\operatorname{tr}(A\nabla u(x_0)) \leq 0$, d.h.,

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x_0)\nabla^2_{ij}u(x_0) \leq 0.$$

Es lierfert

$$-Lu(x_0) = -\{\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\partial_{ij}u + b_i\partial_i u(x_0) + c(x_0)u(x_0)\} \geq 0.$$

Ein Widerspruch!

Schritt 2. Nun betrachten wir den allgemeinen Fall. Für $\varepsilon > 0$ betrachte

$$w(x) = u + \varepsilon e^{\mu x_1},$$

wobei μ is eine positive Konstante, die wir spät wählen werden. Eine direkte Berechnung ergibt sich

$$-Lw = -\big\{Lu + \varepsilon e^{\mu x_1}(a_{11}\mu^2 + b_1\mu + c)\big\} \leq -\varepsilon e^{\mu x_1}(a_{11}\mu^2 + b_1\mu + c).$$

da b_1 unf c beschänkt sind und $a_{11} \leq \lambda > 0$, können wir $\mu > 0$ so wählen, dass

$$a_{11}\mu^2 + b_1\mu + c > 0 \quad \text{in } \Omega$$

gilt. Nach Schnitte 1 gilt

$$\max_{\Omega} w \leq \max_{\partial\Omega} w^+.$$

Daraus folgt

$$\sup_{\Omega} u \leq \sup_{\Omega} w \leq \max_{\partial\Omega} w^+ \leq \max_{\partial\Omega} u^+ + \varepsilon \max_{\partial\Omega} e^{\mu x_1}.$$

Der Grenzübergang $\varepsilon \to 0$ lierfert

$$\sup_{\Omega} u \leq \max_{\partial\Omega} u^+.$$

□

Bemerkung 5.5. Falls $c = 0$ in den obigen Satz, dann gilt

$$\max_{\overline{\Omega}} u \leq \max_{\partial\Omega} u.$$

Korollar 5.6. *Sei $c \leq 0$. Seien $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ mit $-Lu \leq 0$ in Ω und $u \leq 0$ auf $\partial\Omega$. Dann gilt $u \leq 0$ in Ω.*

Korollar 5.7 (Vergleichsprinzip)**.** *Sei $c \leq 0$. Seien $u, v \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ mit $-Lu \leq -Lv$ in Ω und $u \leq v$ auf $\partial\Omega$. Dann gilt $u \leq v$ in Ω.*

Beweis. Die Differenz $w = u - v$ erfüllt $-Lw \leq 0$ in Ω und $w \leq 0$ auf $\partial\Omega$. Nach Korollar 5.6 gilt $w \leq 0$ in Ω. □

Das Vergleichsprinzip rechtfertigt die Name der Sublösung.

Bemerkung 5.8. Under der Bedingung

$$c \leq 0 \text{ in } \Omega$$

gilt

$$\left.\begin{cases} -Lu \leq -Lv & \text{in } \Omega \\ \quad u \leq v & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}\right\} \Longrightarrow u \leq v \text{ in } \Omega.$$

Korollar 5.9 (Eindeutigkeit)**.** *Sei $c \leq 0$ in Ω. Für $f \in C(\Omega)$ und $\varphi \in C(\partial\Omega)$ existiert höchstens eine Lösung $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ von*

$$\begin{aligned} -Lu &= f, && \textit{in } \Omega, \\ u &= \varphi && \textit{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Bemerkung 5.10. 1. Die Eindeutigkeit, und auch das Maximumprinzip, gilts i. A. nicht für unbeschränkten Gebiete.

Betrachte

$$\begin{aligned} -\Delta u &= 0, \quad \text{in } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

in $\Omega = \mathbb{R}^n \backslash B_1$. Eine nichttriviale Lösung ist gegeben durch

$$u(x) = \begin{cases} \log|x|, & \text{falls } n = 2, \\ |x|^{2-n} - 1, & \text{falls } n \geq 3. \end{cases}$$

2. Die Eindeutigkeit, und auch das Maximumprinzip, gilts i. A. auch nicht für $c > 0$.

Betrachte $\Omega = (0, \pi) \times \cdots \times (0, \pi) \subset \mathbb{R}^n$ und

$$u(x) = \prod_{i=1}^{n} \sin x_i.$$

Dann ist u eine nichttriviale Lösung von

$$\begin{aligned} -(\Delta u + nu) &= 0, \quad \text{in } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

mit $c = n > 0$. Eigentlich ist n die Eigenwert von $-\Delta$ mit der Dirichletrandbedingung.

5.2. **Starkes Maximumprinzip.**

Theorem 5.11 (Hopf-Lemma)**.** *Sei $\Omega = B$ eine Kugel in $\mathbb{R}^n$ mit $x_0 \in \partial B$. Sei $c(x) \leq 0$ in B. Sei $u \in C^2(B) \cap C^1(\overline{B})$ eine Unterlösung von $-Lu = 0$, d.h., $-Lu \leq 0$ in B. Weiter gelten $u(x) < u(x_0)$ für alle $x \in B$ unf $u(x_0) \geq 0$. Dann gilt*

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) > 0,$$

wobei ν die äußere Normale von B an x_0 ist.

Beweis. OBdA annemhen wir an, dass $B = B_R$ für ein $R > 0$. Aus der Stetigkeit von u in $\overline{B}$ gilt

$$u(x) \leq u(x_0) \quad \text{für alle } x \in \overline{B}_R.$$

Für positive Konstante μ und ε setzen wir

$$v(x) = u(x) - u(x_0) + \varepsilon w(x)$$

mit

$$w(x) = e^{-\mu|x|^2} - e^{-\mu R^2}.$$

Wir betrachten w und v in $\Omega := B_R \backslash \overline{B}_{R/2}$. Eine direkte Berechnung liefert

$$\begin{aligned} Lw &= e^{-\mu|x|^2} \big\{ 4\mu^2 \sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j - 2\mu \sum_i a_{ii} - 2\mu \sum_i b_i x_i + c \big\} - c e^{-\mu R^2} \\ &\geq e^{-\mu|x|^2} \big\{ 4\mu^2 \sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j - 2\mu \sum_i a_{ii} - 2\mu \sum_i b_i x_i + c \big\}, \end{aligned}$$

da $c \leq 0$ in Ω. Aus der Elliptizität haben wir

$$\sum_{i,j} a_{ij}(x) x_i x_j \geq \lambda |x|^2 \geq \lambda \frac{R^2}{4} > 0 \quad \text{in } \Omega.$$

Es liefert

$$Lw \geq e^{-\mu|x|^2} \{ \mu^2 \lambda R^2 - 2\mu \sum_i (a_{ii} + b_i x_i) + c \} \geq 0 \quad \text{in } \Omega,$$

wenn wir μ hinreichend groß wählen. Da $c(x) \leq 0$ in Ω und $u(x_0) \geq 0$, gilt

$$-Lv = -Lu + \varepsilon Lw + cu(x_0) \leq 0 \quad \text{in } \Omega$$

für alle $\varepsilon > 0$. Der Rand von Ω, $\partial\Omega$, hat zwei Komponente. Auf $\partial B_{R/2}$ gilt nach Voraussetzung $u - u(x_0) < 0$. Bei der Stetigkeit haben wir

$$u - u(x_0) < -\varepsilon \quad \text{auf } \partial B_{R/2}$$

für eine kleine $\varepsilon > 0$. Da $w < 1$ auf $\partial B_{R/2}$, haben wir $v < 0$ auf $\partial B_{R/2}$ für diese kleine ε. Auf ∂B_R ist es leicht zu sehen, dass $v \leq 0$ gilt, denn $w = 0$ auf ∂B_R. Das schwache Maximumprinzip liefert $v \leq 0$ in Ω. Da $v(x_0) = 0$, ist x_0 einer maximale Punkt von v. Es folgt

$$\frac{\partial v}{\partial \nu}(x_0) \geq 0,$$

bzw.

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) \geq -\varepsilon \frac{\partial w}{\partial \nu}(x_0) = 2\varepsilon\mu R^{-\mu R^2} > 0.$$

□

Definition 5.12 (Kugelbedingungen)**.** Für Ω, eine *innere Kugelbedingung* in $x_0 \in \partial\Omega$ bedeutet es eine Kugel $B \subset \Omega$ derart existert, so dass $x_0 \in \partial B$.

Für Ω, eine *äußere Kugelbedingung* in $x_o \in \partial\Omega$ bedeutet es eine Kugel B derart existert, so dass

$$\Omega \cap B = \emptyset, \quad \overline{\Omega} \cap \overline{B} = \{x_0\}$$

gilt.

Bemerkung 5.13. Theorem 5.11 gilt für jedes beschänktes C^1-Gebiet, das die innere Kugelbedingung in $x_0 \in \partial\Omega$ erfüllt.

Theorem 5.14 (Starkes Maximumprinzip)**.** *Sei $c \leq 0$ und L strikt elliptisch. Sei $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ eine Unterlösung von $-Lu = 0$, d.h., $-Lu \leq 0$ in Ω. Dann u nimmt ihr nicht negatives Maximum nur am Rand $\partial\Omega$, ansonst ist u konstant.*

Beweis. Sei M das Maximum von u in $\overline{\Omega}$ und setze

$$D := \{x \in \Omega \,|\, u(x) = M\}.$$

Wir zeigen, dass $D = \emptyset$ oder $D = \Omega$. Angenommen, dass $D \neq \emptyset$. Aus der Stetigkeit von u ist D relativ abgeschlossen in Ω. Dann ist $\Omega \backslash D$ offen, und existert eine offene Kugel $B \subset \Omega\backslash D$ mit $\partial B \cap D \neq \emptyset$. Denn wir wählen einen Punkt $x^* \in \Omega\backslash D$ mit $\operatorname{dist}(x^*, D) < \operatorname{dist}(x^*, \Omega)$ und dann nehmen B die Kugel mit dem Radius $\operatorname{dist}(x^*, D)$ und dem Zentrum im x^*. Sei $x_0 \in \partial B \cap D \neq \emptyset$. Offensichtig gilt

$$-Lu \leq 0 \text{ in } B, \text{ und } u(x) < u(x_0) \text{ in } B \text{ mit } u(x_0) = M \geq 0.$$

Nach Satz 5.11 gilt

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) > 0.$$

Ein Widerspruch zu $\nabla u(x_0) = 0$. □

Nun können wir Korollar 5.6 verbessern.

Korollar 5.15. *Sei $c \leq 0$. Seien $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ mit $-Lu \leq 0$ in Ω und $u \leq 0$ auf $\partial\Omega$. Dann gilt entweder $u < 0$ in Ω oder u ist eine nicht-positive Konstante in Ω.*

5.3. **apriori Abschätzungen.**

Theorem 5.16. *Sei $c \leq 0$ in Ω. Sei $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ eine Lösung von*

$$\begin{aligned} -Lu &= f, && \text{in } \Omega, \\ u &= \varphi && \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

für $f \in C(\overline{\Omega})$ und $\varphi \in C(\partial\Omega)$. Dann gilt

$$\max_{\overline{\Omega}} |u| \leq \max_{\partial\Omega} |\varphi| + C \max_{\overline{\Omega}} |f|,$$

wobei C eine positive Konstante ist, die nur von n, λ, diam (Ω) *und* $\sup_\Omega |b_i|$.

Beweis. Setze $F = \sup_{\overline{\Omega}} |f|$ und $\Phi = \max_{\partial\Omega} |\varphi|$. Dann gilt

$$\begin{cases} -L(\pm u) &= \pm f \leq F, & \text{in } \Omega \\ \pm u &= \pm\varphi \leq \Phi, & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

OBdA können wir annehmen, dass $\Omega \subset \{0 < x_1 < d\}$ für ein $d > 0$. Betrachte

$$v = \Phi + (e^{\mu d} - e^{\mu x_1})F,$$

für ein größe $\mu > 0$. offentlich gilt $v \geq \Phi$ in Ω. Eine direkte berechnung liefert

$$-Lv = (a_{11}\mu^2 + b_1\mu)Fe^{\mu x_1} - c\Phi - c(e^{\mu d} - e^{\mu x_1})F \geq (a_{11}\mu^2 + b_1\mu)Fe^{\mu x_1},$$

da $c \leq 0$. Wir wählen μ groß so dass

$$a_{11}\mu^2 + b_1\mu \geq 1 \quad \text{in } \Omega.$$

Wir haben

$$\begin{cases} -Lv &\geq F, & \text{in } \Omega \\ v &\geq \Phi, & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

Nach dem Vergleichsprinzip, Satz 5.7, gilt

$$\pm u \leq v \quad \text{in } \Omega.$$

Daher gilt

$$|u(x)| \leq v(x) \leq \Phi + e^{\mu d}F \quad \forall x \in \Omega.$$

□

Lemma 5.17 (Barriere)**.** *Sei Ω ein beschränktes gebiet mit der äußeren Kugelbedingung an $x_0 \in \partial\Omega$. Sei $c \leq 0$ in Ω. Dann existiert eine Funktion $w_{x_0} \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$, die*

$$\begin{aligned} -Lw_{x_0} &\geq 1 && \text{in } \Omega, \\ w_{x_0}(x_0) &= 0, && \\ w_{x_0}(x) &> 0, && \forall x \in \overline{\Omega}\backslash\{x_0\}, \end{aligned}$$

erfüllt, obei w_{x_0} nur von n, λ, Λ, $\sup_\Omega |b_i|$ und Ω abhängt.

Beweis. Einfachhalber nehmen wir an, dass

$$\Omega \cap B_R = \emptyset, \quad \overline{\Omega} \cap \overline{B}_R = \{x_0\}$$

gilt. Setze

$$w(x) = \tau(R^{-\sigma} - |x|^{-\sigma}),$$

wobei $\tau > 0$ und $\sigma > 0$ spät gewählt werden. Offensichtig ist $w > 0$ auf $\partial\Omega$ und $w(x_0) = 0$. Eine direkte Berechung liefert

$$\begin{aligned} -Lw &= \tau\sigma|x|^{-\sigma-4}\left\{(\sigma+2)\sum_{i,j} a_{ij}x_ix_j - |x|^2\sum_i(a_{ii} + b_ix_i)\right\} - \tau c(R^{-\sigma} - |x|^{-\sigma}) \\ &\geq \tau\sigma|x|^{-\sigma-2}\left\{\lambda(\sigma+2) - |x|^2\sum_i(a_{ii} + b_ix_i)\right\}, \end{aligned}$$

da $\sum_{i,j} a_{ij}x_ix_j \geq \lambda|x|^2$ und $c \leq 0$. Wir bemerken, dass $R \leq |x| \leq R + \operatorname{diam}(\Omega)$, $\forall x \in \Omega$ gilt. Wir wählen σ so groß, dass

$$(\sigma+2) - |x|^2\sum_i(a_{ii} + b_ix_i) \geq 1$$

gilt. Und dann wählen wir τ so groß, dass

$$-Lw \geq 1$$

gilt. □