Diese Funktion heißt die *Barriere* oder *Barriere-Funktion* für L den Operator in $x_0 \in \Omega$.

Theorem 5.18. *Sei $\Omega \in \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit der äußeren Kugelbegingung an $x_0 \in \partial\Omega$ und L einer gleichmäßig elliptische Operator mit der Bedingung 5.1. Ist $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ eine Lösung von*

$$\begin{aligned} -Lu &= f, \quad \text{in } \Omega, \\ u &= \varphi \quad \text{auf } \partial\Omega, \end{aligned}$$

für $f \in C(\overline{\Omega})$ und $\varphi \in C(\partial\Omega)$. Dann, gilt

$$|u(x) - u(x_0)| \leq \omega(|x - x_0|) \quad \text{für all } x \in \Omega,$$

wobei ω eine monoton fallende Funktion in $(0, \infty)$ mit $\lim_{r\to 0} \omega(r) = 0$, die nur von λ, Λ, $\sup_\Omega |u|$, $\sup_{\partial\Omega} |\varphi|$, $\sup_{\overline{\Omega}} |f|$ und dem Stetigkeitsmodul von φ auf $\partial\Omega$ anhängt.

Beweis. Setze

$$L_0 = \sum_{i,j} a_{ij}\partial_{ij} - \sum_i b_i\partial_i.$$

Also $-L_0u = f + cu$. Sei $w = w_{x_0}$ die Barriere für den Operator L_0, d.h.,

$$\begin{aligned} -L_0w &\geq 1 \quad \text{in } \Omega, \\ w(x_0) &= 0, \\ w(x) &> 0, \quad \forall x \in \overline{\Omega}\backslash\{x_0\}, \end{aligned}$$

Wir setzen

$$F = \sup_\Omega |f - cu|, \quad \Phi = \sup_{\partial\Omega} |\varphi|.$$

Sei $\varepsilon > 0$ bliebig. Aus dem Stetigkeit von φ in x_0 existiert $\delta > 0$ derart, dass

$$|\varphi(x) - \varphi(x_0)| \leq \varepsilon, \qquad \forall x \in \partial\Omega \cap B_\delta(x_0)$$

gilt. Wir wählen K hinreichend groß, so dass $K \geq F$ und

$$Kw \geq 2\Phi \qquad \text{auf } \partial\Omega\backslash B_\delta(x_0).$$

Dann erhalten wir

$$-L_0(Kw) \geq K \geq F \quad \text{in } \Omega$$

und

$$|\varphi(x) - \varphi(x_0)| \leq \varepsilon + Kw, \qquad \forall x \in \partial\Omega.$$

Dies impliziert

$$\begin{aligned} -L_0(\pm\{u - \varphi(x_0)\}) &\leq -L_0(\varepsilon + Kw) \quad \text{in } \Omega \\ \pm\{u - \varphi(x_0)\} &\leq \varepsilon + Kw \quad \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Nach dem Maximumprinzip erhalten wir

$$|u - \varphi(x_0)| \leq \varepsilon + Kw \qquad \text{in } \Omega.$$

Da $w(x) \to 0$ als $x \to x_0$, können wir ein $\delta' < \delta$ derart finden, so dass

$$|u - \varphi(x_0)| \leq 2\varepsilon \qquad \text{in } \Omega \cap B_{\delta'}(x_0)$$

gilt.

□

Definition 5.19. Es sei $f : \Omega \to \mathbb{R}$ stetig. Der Stetigkeitsmodul ω_f von f auf Ω ist definiert durch

$$\omega_f : (0, \infty) \to \mathbb{R}, \quad \omega_f(\delta) := \sup\{|f(x) - f(y)| : x, y \in \Omega, |x - y| < \delta.\}$$

Es gilt

(1) ω_f ist monoton wachsend.
(2) ω_f ist subadditiv, *d.h.* für alle $\delta, \delta' \in (0, \infty)$ gilt $\omega_f(\delta + \delta') \leq \omega_f(\delta) + \omega_f(\delta')$.
(3) f ist auf Ω genau dann gleichmäßig stetig, falls $\lim_{\delta\to 0, \delta>0} \omega_f(\delta) = 0$.

Nun verallgemeinen wir Lemma 4.3. Für jede Kugel B in $\mathbb{R}^n$, definieren wir

$$d_x := \operatorname{dist}(x, \partial B).$$

Lemma 5.20. *Sei $\Omega = B \subset \mathbb{R}^n$ und L einer gleichmäßig elliptische Operator mit der Bedingung 5.1 und $c \le 0$ in B. Sei $f \in C(B)$ mit*

$$\sup_{x \in B} d_x^{2-\beta} |f(x)| < \infty,$$

für ein $\beta \in (0,1)$. Sei $u \in C(\overline{B}) \cap C^2(B)$ eine Lösung von

$$\begin{cases} -Lu &= f, \quad \text{in } \Omega \\ u &= 0, \quad \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

Dann gilt

$$\sup_B d_x^{-\beta} |u(x)| \le C \sup_B d_x^{2-\beta} |f(x)|, \qquad \forall x \in B,$$

wobei $C > 0$ nur von n, β, λ, Λ und $\sup_\Omega |b_i|$ abhängt.

Beweis. Wir nemhen an, dass $B = B_R$. Wir betrachten

$$w_1(x) = (R^2 - |x|^2)^\beta$$

und erhalten

$$\begin{aligned} -Lw_1 &= \beta(R^2 - |x|^2)^{\beta-2} \left\{ 4(1-\beta) \sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j + 2(R^2 - |x|^2) \sum_i (a_{ii} + b_i x_i) \right\} \\ &\quad - c(R^2 - |x|^2)^\beta \\ &\ge \beta(R^2 - |x|^2)^{\beta-2} \left\{ 4(1-\beta)\lambda |x|^2 + 2(R^2 - |x|^2) \sum_i (n\lambda - \sqrt{n} M R) \right\}. \end{aligned}$$

Hierbei ist $M = \sup_\Omega |b_i|$. Es ist klar, dass die Ausdruck in der Klammer für $R_0 \le |x| \le R$ für ein $R_0 \in [0, R)$ positiv ist. Daher erhalten wir

$$-Lw_1 \ge \begin{cases} c_1 (R - |x|)^{\beta-2} & \text{für } R_0 \le |x| \le R \\ -c_2 (R - |x|)^{\beta-2} & \text{für } |x| \le R_0, \end{cases}$$

wobei c_1, c_2 positive Konstante sind, die nur von n, λ, $M = \sup_\Omega |b_i|$, R und β abhängt. Nun betrachte

$$w_2(x) = e^{\tau R} - e^{\tau x_1}.$$

Wir haben

$$\begin{aligned} -Lw_2 &= \tau^2 a_{11} e^{\tau x_1} + \tau b_1 e^{\tau x_1} - c(e^{\tau R} - e^{\tau x_1}) \\ &\ge e^{\tau x_1} (\lambda \tau^2 + \tau b_1) \\ &\ge \lambda e^{\tau x_1}, \end{aligned}$$

für groß $\tau > 0$. Es folgt

$$-Lw_2 \ge \begin{cases} 0 & \text{für } R_0 \le |x| \le R \\ c_3 (R - |x|)^{\beta-2} & \text{für } |x| \le R_0, \end{cases}$$

mit $c_3 = \lambda e^{-\tau R} (R - R_0)^{2-\beta}$. Setze $\gamma_1 = 1/c_1$, $\gamma_2 = (1 + c_2/c_1)/c_3$ und $w = \gamma_1 w_1 + \gamma_2 w_2$. Wir erhalten

$$\begin{aligned} -Lw &\ge (R - |x|)^{\beta-2} && \text{in } B \\ w &\ge 0 && \text{auf } \partial B \end{aligned}$$

und $w(x) = 0$ in $x = (R, 0, \cdots, 0)$.

Setze

$$N = \sup_{x\in B} d_x^{2-\beta}|f(x)| < \infty.$$

Dann haben wir

$$-L(\pm u) = \pm f \le N d_x^{\beta-2} = N(R-|x|)^{\beta-2}.$$

Insgesamt erhalten wir

$$\begin{cases} -L(\pm u) & \le & -L(Nw), & \text{in } B \\ \pm u & \le & Nw, & \text{auf } \partial B. \end{cases}$$

Das Maximumprinzip liefert

$$|u(x)| \le Nw(x), \quad \forall x \in B_R.$$

Für ein $x \in B$, OBdA nehmen wir an, dass $x = (x_1, 0, \cdots, 0)$, also $x_1 = |x|$. Wir haben

$$\begin{array}{rcl} |u(x)| & \le & N\{\gamma_1(R^2-|x|^2)^\beta + \gamma_2(e^{\tau R} - e^{\tau |x|})\} \\ & \le & CN(R-|x|)^\beta = CNd_x^\beta. \end{array}$$

□

Theorem 5.21. *Sei $\Omega \in \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit der äußeren Kugelbegingung in $x_0 \in \partial\Omega$ und L einer gleichmäßig elliptische Operator mit der Bedingung 5.1. Ist $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ eine Lösung von*

$$\begin{array}{rcll} -Lu & = & f, & \textit{in } \Omega, \\ u & = & \varphi & \textit{auf } \partial\Omega, \end{array}$$

für $f \in C(\overline{\Omega})$ und $\varphi \in C^2(\overline{\Omega})$. Dann, gilt

$$|u(x) - u(x_0)| \le C(\sup_\Omega |u| + \|\varphi\|_{C^2(\Omega)} + \sup_\Omega |f|)|x - x_0|.$$

wobei $C > 0$ nur von λ, Λ und Ω anhängt.

Falls die normalen Ableitung von u existiert, gilt die Abschätzung

$$\Big|\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0)\Big| \le C(\sup_\Omega |u| + \|\varphi\|_{C^2(\Omega)} + \sup_\Omega |f|).$$

Beweis. Wie in den Beweis von Satz 5.18 setze

$$L_0 = \sum_{i,j} a_{ij}\partial_{ij} - \sum_i b_i \partial_i.$$

Dann gilt $-L_0 u = f + cu$. Mit $v := u - \varphi$ haben wir

$$\begin{array}{rcll} -L_0 v & = & f + cu + L_0\varphi & \text{in } \Omega, \\ v & = & 0 & \text{auf } \partial\Omega. \end{array}$$

Nun setzen wir $F = \sup_\Omega |f + cu + L_0\varphi|$ und erhalten

$$\begin{array}{rcll} -L_0(\pm v) & \le & F & \text{in } \Omega, \\ \pm v & = & 0 & \text{auf } \partial\Omega. \end{array}$$

Sei $w = w_{x_0}$ die in Lemma 5.17 konstruierte Funktion für den L_0, d.h.,

$$\begin{array}{rcll} -L_0 w & \ge & 1 & \text{in } \Omega, \\ w & > & 0 & \text{auf } \partial\Omega\backslash\{x_0\} \\ w(x_0) & = & 0. & \end{array}$$

Es folgt

$$\begin{array}{rcll} -L_0(\pm v) & \le & -L(Fw) & \text{in } \Omega, \\ \pm v & \le & Fw & \text{auf } \partial\Omega\backslash\{x_0\}. \end{array}$$

Das Maximumprinzip impliziert

$$|v| \le Fw \text{ in } \Omega.$$

Es folgt

$$\begin{aligned}
|u(x) - u(x_0)| &= |v(x) + \varphi(x) - \varphi(x_0)| \\
&\leq |v(x)| + |\varphi(x) - \varphi(x_0)| \\
&\leq Fw(x) + |\varphi(x) - \varphi(x_0)|
\end{aligned}$$

□

6. Abschätzung von Schauder

Im diesen Kapital diskutieren wir die Schauder-Theorie für den gleichmßig ellptischen partiellen Differentialgleichungen.

6.1. **Innere Abschätzung von Schauder.**

In diesem Abschnitt betracten wir innere Abschätzung von Schauder, unter

Begingungen 6.1. Sei $\Omega \in \mathbb{R}^n$ beschränkt und seien a_{ij}, b_i und c beschränkte, stetige Funktionen in Ω mit $a_{ij} = a_{ji}$. Wir untersuchen folgenden Operatoren

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\partial_{ij}u + \sum_{i=1}^{n} b_i\partial_i u + cu \quad \text{in } \Omega, \tag{6.1}$$

für $u \in C^2(\Omega)$. Der Operator ist strikt elliptisch in Ω, d.h.,

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\xi_i\xi_j \geq \lambda|\xi|^2 \qquad \text{für alle } x \in \Omega \text{ und } \xi \in \mathbb{R}^n \tag{6.2}$$

gilt für Konstante $\lambda > 0$.

Definition 6.2. Sei B_R eine Kugel in $\mathbb{R}^n$, k nichtnegative Ganzzahl und $\alpha \in (0,1)$. Wir definieren

$$|u|^*_{C^{k,\alpha}(B_R)} = \sum_{i=0}^{k} R^i|D^i u|_{L^\infty(B_R)} + R^{k+\alpha}[D^k u]_{C^\alpha(B_R)}.$$

Wir können Theorem 4.14 in folgender genauerer Form schreiben

Lemma 6.3 (Schauder-Abschätzung für den konstanten Koeffizienten)**.** *Sei $f \in C^\alpha(B_R)$ für ein $\alpha \in (0,1)$, sein (a_{ij}) eine konstane $n \times n$ Matrix mit*

$$\lambda|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\xi_i\xi_j \leq \Lambda|\xi|^2 \qquad \text{für alle } \xi \in \mathbb{R}^n,$$

für Konstante $\lambda > 0$ und $\Lambda > 0$. $u \in C^2(B_R)$ erfüllt

$$\sum_{i,j} a_{ij}\partial_{ij} = f \quad \text{in } B_R.$$

Dann gilt $u \in (B_R)$. Wieter gilt

$$|u|^*_{C^{2,\alpha}(B_{R/2})} \leq C\{|u|_{L^\infty(B_R)} + R^2|f|^*_{C^\alpha(B_R)}\},$$

wobei C eine nut von n, α, λ und Λ abhängte positive Konstante ist.

Beweis. Falls $a_{ij} = \delta_{ij}$, haben wir die gewünschten Abschätzung schon in Satz 4.13 bewiesen. Wir wollen zeigen, dass der allgemeine Fall auf den speizellen Fall reduziert kann.

Setze $A = (a_{ij}$. A ist eine symmetrische, positiv infinite Matrix. Also ist A diagonalisierbar, d.h., existiert eine orthogonale Matrix U mitAnfangswerten $U^tAU = \operatorname{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ mit $\lambda \leq \lambda_i \leq \Lambda$ für $i = 1, 2, \cdots, n$. Setze $Q = UD$ mit $D = \operatorname{diag}(\lambda_1^{-1/2}, \cdots, \lambda_n^{-1/2})$. Dann gilt $Q^tAQ = I$, die identische Matrix. Nun betrachten wir die Transformation $y = Qx$ und setzen $\tilde{u}(y) = u(x)$, $\tilde{f}(y) = f(x)$ für $y \in Q(B_R)$. Dann ist die Gleichung $\sum_{i,j} a_{ij}\partial_{ij}u(x) = f(x)$ in B_R in die Gleichung $\tilde{\Delta(y)} = \tilde{f}(y)$ in $Q(B_R)$ transformiert. (s. Blatt 01, Aufgabe 2)

Nun betrachten wir das Gebiet $Q(B_R)$. Da die orthogonale Matrix U die Länge behält, erhalten wir

$$\Lambda^{-1/2}|x| \leq |Q(x) \leq \lambda^{-1/2}|x|.$$

Für $Q(B_{R/2}) \subset Q(B_R)$ existiert eine Konstante $\tau \in (0,1)$ und eine positive Ganzzahl N, die allein von n, λ und Λ bestimmt werden, so dass

$$Q(B_{R/2}) \subset \cup_{i=1}^n B_{\tau R/2}(y_i) \subset \cup_{i=1}^n B_{\tau R}(y_i) \subset Q(B_R),$$

für $y_1, \cdots, y_N \in Q(B_R)$. In $B_{\tau R}(y_i)$ können wir den speizellen Fall anwenden und erhalten

$$|\tilde{u}|^*_{C^{2,\alpha}(B_{\tau R/2}(y_i))} \leq C\big\{|\tilde{u}|_{L^\infty(B_{\tau R}(y_i))} + R^2|\tilde{f}|^*_{C^\alpha(B_{\tau R}(y_i))}\big\}, \quad \forall i = 1, \cdots, N.$$

Mit Hilfe der Transformation Q erhaten wir

$$|u|^*_{C^{2,\alpha}(B_{R/2})} \leq \sum_{i=1}^N |\tilde{u}|^*_{C^{2,\alpha}(B_{\tau R/2}(y_i))}$$

und

$$\sum_{i=1}^N |\tilde{f}|^*_{C^\alpha(B_{\tau R}(y_i))} \leq |f|^*_{C^\alpha(B_R)}.$$

Die gewünschte Abschätzung folgt leicht. □

Lemma 6.4 (Interpolation). *Seien $\alpha, \mu \in (0,1)$ und B_R eine Kugel in $\mathbb{R}^n$. Dann gilt:*

(1) für alle $u \in C^{1,\alpha}(\overline{B}_R)$

$$\mu^\alpha R^\alpha [u]_{C^\alpha(B_R)} \leq C\big\{\mu R[\nabla u]_{L^\infty(B_R)} + |u|_{L^\infty(B_R)}\big\},$$

(2) für alle $u \in C^{1,\alpha}(\overline{B}_R)$

$$\mu R|\nabla u|_{L^\infty(B_R)} \leq C\big\{\mu^{1+\alpha} R^{1+\alpha}[\nabla u]_{C^\alpha(B_R)} + |u|_{L^\infty(B_R)}\big\},$$

(3) für alle $u \in C^2(\overline{B}_R)$

$$\mu R|\nabla u|_{L^\infty(B_R)} \leq C\big\{\mu^2 R^2|\nabla^2 u|_{L^\infty(B_R)} + |u|_{L^\infty(B_R)}\big\},$$

wobei C eine nur von n und α abhängte Konstante.

Beweis. Wir beweisen dem Lemma für $R = 1$. Der allgemeine Fall folgt aus einer Skalierungsargument.

(1) Für alle $x, y \in B_1$ impliziert der Mittelwertsatz

$$\frac{|u(x) - u(y)|}{|x-y|^\alpha} \leq |\nabla u|_{L^\infty(B_1)}|x-y|^{1-\alpha}.$$

Falls $|x - y| \leq \mu$, dann gilt

$$\frac{|u(x) - u(y)|}{|x-y|^\alpha} \leq \mu^{1-\alpha}|\nabla u|_{L^\infty(B_1)}.$$

Falls $|x - y| \geq \mu$, dann gilt

$$\frac{|u(x) - u(y)|}{|x-y|^\alpha} \leq 2\mu^{-\alpha}|u|_{L^\infty(B_1)}.$$

Es folgt

$$[u]_{C^\alpha(B_1)} \leq \mu^{1-\alpha}|\nabla u|_{L^\infty(B_1)} + 2\mu^{-\alpha}|u|_{L^\infty(B_1)}.$$

(2) Für jede $x \in B_1$ existiert einer Einheitsvektor e, so dass $x + \mu\eta \in B_1$ für allen Einheitsvektor $\eta \in \mathbb{R}^n$ mit Winkel $\angle(\eta, e) < \pi/4$. and alle $\mu \in (0,1)$. Nun fixiere solche η und μ. Nach dem Mittelwertsatz existiert $\bar{x}$ zwischen x und $x + \mu\eta$, so dass gilt

$$|\partial_\eta u(\bar{x})| = \frac{1}{\mu}|u(x) - u(x+\mu\eta)| \leq \frac{2}{\mu}|u|_{L^\infty(B_1)}.$$

Es folgt

$$|\partial_\eta u(x)| \leq |\partial_\eta u(\bar{x})| + |\partial_\eta u(\bar{x}) - \partial_\eta u(x)| \leq \frac{2}{\mu}|u|_{L^\infty(B_1)} + |x - \bar{x}|^\alpha[\nabla u]_{C^\alpha(B_1)}.$$

Da $|x - \bar{x}| \leq \mu$, erhalten wir

$$|\partial_\eta u(x)| \leq \frac{2}{\mu}|u|_{L^\infty(B_1)} + \mu^\alpha[\nabla u]_{C^\alpha(B_1)}.$$

Dies gilt für alle Einheitsvektor η mit Winkel $\angle(\eta, e) < \pi/4$. Wir heben

$$|\nabla u(x)| \le C\{\frac{1}{\mu}|u|_{L^\infty(B_1)} + \mu^\alpha[\nabla u]_{C^\alpha(B_1)}\}.$$

(3) Der Beweis ist ähnlich wie der Beweis für (2). (Übung) □

Korollar 6.5. *Seien $\alpha, \mu \in (0,1)$ und B_R eine Kugel in $\mathbb{R}^n$. Dann gilt: für alle $u \in C^{2,\alpha}(\overline{B}_R)$*

$$\sum_{i=1}^{2}(\mu R)^i|\nabla^i u|_{L^\infty(B_R)} + \sum_{i=0}^{1}(\mu R)^{i+\alpha}[\nabla^i u]_{C^\alpha(B_R)} \le c\big\{(\mu R)^{2+\alpha}[\nabla^2 u]_{C^\alpha(B_R)} + |u|_{L^\infty(B_R)}, \big\}$$

wobei C eine nur von n und α abhängte Konstante.

Beweis. Wir berachten nur $R = 1$ und zwar nur

$$\mu^2|\nabla^2 u|_{L^\infty(B_1)} \le C\big\{\mu^{2+\alpha}[\nabla^2 u]_{C^\alpha(B_1)} + |u|_{L^\infty(B_1)}\big\}.$$

Zuerste wenden wir (2) in Lemma 6.4 auf die erste Ableitungen von u an, und erhalten wir

$$|\nabla^2 u|_{L^\infty(B_1)} \le C\big\{\mu^\alpha[\nabla u]_{C^\alpha(B_1)} + \frac{1}{\mu}|u|_{L^\infty(B_1)}\big\}.$$

Lemma 6.4 (3) liefert

$$|\nabla u|_{L^\infty(B_1)} \le \big\{\tau|\nabla^2 u|_{L^\infty(B_1)} + \frac{1}{\tau}|u|_{L^\infty(B_1)}\big\},$$

wobei wir μ durct $\tau \in (0,1)$ ersetzen. Es folgt

$$|\nabla^2 u|_{L^\infty(B_1)} \le C\big\{\mu^\alpha[\nabla u]_{C^\alpha(B_1)} + \frac{\tau}{\mu}|\nabla^2 u|_{L^\infty(B_1)} + \frac{1}{\tau\mu}|u|_{L^\infty(B_1)}\big\}.$$

Beim Wählen $\tau = \mu/2C$ erhalten wir

$$|\nabla^2 u|_{L^\infty(B_1)} \le C\big\{\mu^\alpha[\nabla u]_{C^\alpha(B_1)} + \frac{1}{\mu^2}|u|_{L^\infty(B_1)}\big\}.$$

□

Nun sind wir bereit, die innere Schauder-Abschätzung für die Lösungen von der gleichmäßig elliptischen Gleichungen mit einem Trick zu beweisen. Der Trick heißt *Einfrieren der Koeffizienten.*

Lemma 6.6. *Sei $\Omega = B$ eine Kugel in $\mathbb{R}^n$ und L wie in Voraussetzung 6.1. Seien a_{ij}, b_i und c C^α-Funktionen in B_R für ein $\alpha \in (0,1)$ und erfülle*

$$|a_{ij}|^*_{C^\alpha(B_R)} + R|b_i|^*_{C^\alpha(B_R)} + R^2|c|^*_{C^\alpha(B_R)} \le \Lambda,$$

für eien positive Konstante Λ. Ist $u \in C^{2,\alpha}(B_R)$ eine Lösung von

$$-Lu = f \quad \text{in } B_R.$$

Dann existiert eine Konstante $\varepsilon > 0$, die nur von n, α, λ und Λ abhängt, mit der folgenden Eigenschaft: falls

$$\sup_{x,y \in B_R} |a_{ij}(x) - a_{ij}(y)| \le \varepsilon$$

gelte, dann gilt

$$|u|^*_{C^{2,\alpha}(B_{R/2})} \le C\big\{|u|_{L^\infty(B_R)} + R^2|f|^*_{C^\alpha(B_R)}\big\},$$

wobei C eine nur von n, α, λ und Λ abhängte Konstante.

Beweis. OBdA nahem wir an dass $u \in C^{2,\alpha}(\overline{B}_R)$. Ansonst betrachten wir B_s für bliebige $s < R$ und zeigen die gewünschte Abschätzung für B_s und streben $s \to R$.

Wir zeigen nun

$$R^{2+\alpha}[\nabla^2 u]_{C^\alpha(B_{R/2})} \le C\big\{|u|_{L^\infty(B_R)} + R^2|f|_{L^\infty(B_R)} + R^{2+\alpha}[f]_{C^\alpha(B_R)}\big\}.$$

Wir betrachten bliebige Kugel $B_r \subset B_R$ für $r \in (0,R)$. Da u eine Lösung von $Lu = f$ ist, gilt

$$L_0 u = \sum_{i,j} a_{ij}(0)\partial_{ij} u = \tilde{f},$$

wobei $\tilde{f}$ ist gegeben durch

$$\tilde{f} := f - cu \sum_i b_i \partial_i u - (a_{ij}(0) - a_{ij})\partial_{ij} u.$$

Wir wenden Lemma 6.3 auf $L_0 u = \tilde{f}$ in B_r an und erhalten

$$r^{2+\alpha}|u|_{C^{2,\alpha}(B_{r/2})} \leq C\big\{|u|_{L^\infty(r_R)} + r^2|\tilde{f}|_{L^\infty(B_r)} + r^{2+\alpha}[\tilde{f}]_{C^\alpha(B_r)}\big\}.$$

Für den Norme von $\tilde{f}$ haben wir

$$\begin{aligned} r^2|\tilde{f}|_{L^\infty(B_r)} \quad &\leq \quad r^2|f|_{L^\infty(B_r)} + r^2|c|_{L^\infty(B_r)}|u|_{L^\infty(B_r)} + r^2|b_i|_{L^\infty(B_r)}|\nu|_{L^\infty(B_r)} \\ &\quad +r^2|a_{ij} - a_{ij}(0)|_{L^\infty(B_r)}|\nabla^2|_{L^\infty(B_r)} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} r^{2+\alpha}[\tilde{f}]_{C^\alpha(B_r)} \quad &\leq \quad r^{2+\alpha}[f]_{C^\alpha(B_r)} \\ &\quad +r^{2+\alpha}[c]_{C^\alpha(B_r)}|u|_{L^\infty(B_r)} + r^{2+\alpha}|c|_{L^\infty(B_r)}[u]_{C^\alpha(B_r)} \\ &\quad +r^{2+\alpha}[b_i]_{C^\alpha(B_r)}|\nabla u|_{L^\infty(B_r)} + r^{2+\alpha}|b_i|_{L^\infty(B_r)}[\nabla u]_{C^\alpha(B_r)} \\ &\quad +r^{2+\alpha}[a_{ij} - a_{ij}(0)]_{C^\alpha(B_r)}|\nabla^2 u|_{L^\infty(B_r)} + r^{2+\alpha}|a_{ij} - a_{ij}(0)|_{L^\infty(B_r)}[\nabla^2 u]_{C^\alpha(B_r)}. \end{aligned}$$

Hier haben wir einfachhalber die Zeichen der Summationen weggelassen. Nach der Voraussetzung an der Koeffizienten gilt

$$\begin{aligned} &|a_{ij}|_{L^\infty(B_r)} + r^\alpha[a_{ij}]_{C^\alpha(B_r)} \\ &+r|b_i|_{L^\infty(B_r)} + r^{1+\alpha}[b_i]_{C^\alpha(B_r)} \\ &+r^2|c|_{L^\infty(B_r)} + r^{2+\alpha}[c]_{C^\alpha(B_r)} \quad \leq \Lambda. \end{aligned}$$

Insgesamt gilt

$$\begin{aligned} r^{2+\alpha}[\nabla u]_{C^\alpha(B_{r/2})} \quad &\leq \quad C\big(r^2|f|_{L^\infty(B_r)} + r^{2+\alpha}[f]_{C^\alpha(B_r)} \\ &\quad +\big\{|u|_{L^\infty(B_r)} + r^\alpha[u]_{C^\alpha(B_r)} + r|\nabla u|_{L^\infty(B_r)} + r^{1+\alpha}[\nabla u]_{C^\alpha(B_r)} \\ &\quad +r^2|\nabla^2 u|_{L^\infty(B_r)}\big\} \\ &\quad +|a_{ij} - a_{ij}(0)|_{L^\infty(B_r)} r^{2+\alpha}[\nabla^2 u]_{C^\alpha(B_r)}\big). \end{aligned}$$

Die Terme in Klammer $\{\cdots\}$ können wir durch den Term niedrigster Ordnung $|u|_{L^\infty(B_r)}$ und den Term höchster Ordnung $[\nabla^2 u]_{C^\alpha(B_r)}$ abschätzen, und zwar

$$\begin{aligned} &|u|_{L^\infty(B_r)} + r^\alpha[u]_{C^\alpha(B_r)} + r|\nabla u|_{L^\infty(B_r)} + r^{1+\alpha}[\nabla u]_{C^\alpha(B_r)} + r^2|\nabla^2 u|_{L^\infty(B_r)} \\ &\qquad \leq \varepsilon r^{2+\alpha}[\nabla^2 u]_{C^\alpha(B_r)} + C_\varepsilon|u|_{L^\infty(B_r)}, \end{aligned}$$

wobei $\varepsilon > 0$ die Konstante, die wir finden wollen. Dies folgt direkt aus Korollar 6.5. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} r^{2+\alpha}[\nabla u]_{C^\alpha(B_{r/2})} \quad &\leq \quad C\big\{r^2|f|_{L^\infty(B_r)} + r^{2+\alpha}[f]_{C^\alpha(B_r)} \\ &\qquad +\varepsilon r^{2+\alpha}[\nabla^2 u]_{C^\alpha(B_r)} + C_\varepsilon|u|_{L^\infty(B_r)}\big\}. \end{aligned}$$

Eigentlich gilt dies für jede Kugel $B_r(x_0) \subset B_R$, d. h.,

$$\begin{aligned} r^{2+\alpha}[\nabla u]_{C^\alpha(B_{r/2}(x_0))} \quad &\leq \quad C\big\{r^2|f|_{L^\infty(B_R} + r^{2+\alpha}[f]_{C^\alpha(B_R)} \\ &\qquad +\varepsilon r^{2+\alpha}[\nabla^2 u]_{C^\alpha(B_r(x_0))} + C_\varepsilon|u|_{L^\infty(B_r(x_0))}\big\}. \end{aligned}$$

Da $\varepsilon > 0$ klein ist, hoffen wir, dass die Term $r^{2+\alpha}[\nabla^2 u]_{C^\alpha(B_r(x_0))}$ in rechten Seite von der linken Term $r^{2+\alpha}[\nabla^2 u]_{C^\alpha(B_{r/2}(x_0))}$ absorbieren werden kann. Leider sind die beide Terme nicht in derselben Kugel.