Definition 6.17 (Unterlösung, Oberlösung). $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sei ein Gebiet und L ein elliptischer Operator wie in Bedingung 6.1. Seien a_ij, b_i und c stetig mit $c \leq 0$ in Ω. Sei f stetig in Ω. Eine Funktion $u \in C(\Omega)$ heißt *Unterlösung*, bzw. *Oberlösung*, in Ω falls gilt: Für alle Kugel $B \subset \Omega$ und alle Lösung w von $-Lw = f$ in B gilt:

$$v \leq w \text{ auf } \partial B \Longrightarrow v \leq w \text{ in } B,$$

bzw.

$$v \geq w \text{ auf } \partial B \Longrightarrow v \geq w \text{ in } B.$$

Wir betonen, dass in der Definition nur die Stetigkeit von v verlangt wird. Für solche Unterlösung gilt auch das Maximumprinzip.

Lemma 6.18 (Maximumprinzip). *Sei Ω ein Gebiet in $\mathbb{R}^n$ und L einer Operator gegeben wie in Bedingung 6.1. Seien a_{ij}, b_i und c C^α-Funktionen in Ω für ein $\alpha \in (0,1)$, $c \leq 0$ in Ω. Seien $v, u \in C(\overline{\Omega})$ und $f \in C^\alpha(\Omega)$. Ist u eine Unterlösung in Ω und v eine Unterlösung in Ω mit $u \leq v$ auf $\partial\Omega$, dann gilt $u \leq v$ in Ω.*

Beweis. Setze $M = \max_{\overline{\Omega}}(u - v)$ und

$$D := \{x \in \Omega \,|\, u(x) - v(x) = M\} \subset \Omega.$$

Wir brauchen nur den Fall $M \geq 0$ zu untersuchen. Nach der Stetigkeit von u und v ist D relativ abgeschlossen. Wir wollen nun zeigen, dass D offen ist. Für jedes $x_0 \in D$ nemhen wir $r < \operatorname{dist}(x_0, \partial\Omega)$. Seien $\bar{u}, \bar{v} \in C(\overline{b}) \cap C^{2,\alpha}(B)$ die Lösungen von

$$\begin{aligned} -L\bar{u} &= f, && \text{in } B_r(x_0) \\ \bar{u} &= u && \text{auf } \partial B_r(x_0), \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} -L\bar{v} &= f, && \text{in } B_r(x_0) \\ \bar{v} &= v && \text{auf } \partial B_r(x_0). \end{aligned}$$

Die Existenz von $\bar{u}$ und $\bar{v}$ folgt aus Thereom 6.15. Nach Definition 6.17 gilt

$$u \leq \bar{u}, \quad \bar{v} \leq v \text{ in } B_r(x_0).$$

Es folgt

$$\bar{u} - \bar{v} \geq u - v \text{ in } B_r(x_0).$$

Aus Definition von $\bar{u}$ und v erhalten wir

$$\begin{aligned} -L(\bar{u} - \bar{v}) &= 0, && \text{in } B_r(x_0) \\ \bar{u} - \bar{v} &= u - v && \text{auf } \partial B_r(x_0). \end{aligned}$$

Da $u - v \leq M$ auf $\partial B_r(x_0)$, gilt naxh Maximumprinzip $\bar{u} - \bar{v} \leq M$ in $B_r(x_0)$. Insbesondere, gilt

$$M \geq (\bar{u} - \bar{v})(x_0) \geq (u - v)(x_0) = M.$$

Also $(\bar{u} - \bar{v})(x_0) = M$ und $\bar{u} - \bar{v}$ nimmt ihres Maximum in einem inneren Punkt x_0. Das starke Maximumprinzip impliziert $\bar{u} - \bar{v} = 0$ in $\overline{B}_r(x_0)$. Also $u - v = M$ auf $\partial B_r(x_0)$, und zwar das gilt für alle $r < \operatorname{dist}(x_0, \partial\Omega)$. Es folgt, dass $u - v = M$ in $B_r(x_0)$ und D offen ist. Also entweder $D = \emptyset$, oder $D = \Omega$. In anderen Worten, nimmt $u - v$ kein nichtnegatives Maximum in Ω, oder $u - v$ konstant in Ω ist.

□

Bemerkung 6.19. Der Beweis liefert auch das starke Maximumprinzip: Entweder $u < v$ in Ω oder $u - v$ in Ω konstant ist.

Nun zeigen wir: wie kann man durch eine "Liftung" eine neue Unterlösung konstruieren.

Lemma 6.20 (Liftung)**.** *Sei Ω ein Gebiet in $\mathbb{R}^n$ und L einer Operator gegeben wie in Bedingung 6.1. Seien a_{ij}, b_i und c C^α-Funktionen in Ω für ein $\alpha \in (0,1)$, $c \leq 0$ in Ω. Seien $f \in C^\alpha(\Omega)$, $v \in C(\partial\Omega)$ eine Unterlösung in Ω und B eine Kugel in Ω mit $\overline{B} \subset \Omega$. Ist $w \in C(\overline{B})$ definiert durch*

$$w = v \quad \text{in } \overline{\Omega}\backslash B$$

und

$$-Lw = f \text{ in } B.$$

Dann ist w auch eine Unterlösung in Ω und $v \leq w$ in $\overline{\Omega}$.

Die Funktion w heißt die *Liftung* von v bzgl. dem Operator L.

Beweis. Theorem 6.15 impliziert die Existenz von w und $C(\overline{B}) \cap C^{2,\alpha}(B)$. Nach Definition 6.17 gilt $v \leq w$ in B.

Sei B' eine bliebige Kugel in Ω und betrachte $h \in C(\overline{B}') \cap C^{2,\alpha}(B')$ mit $-Lh = f$ in B' und $w \leq h$ auf $\partial B'$. Wir sollen $w \leq h$ in B' zeigen. Wir zeigen dies in zwei disjunkten Teilmengen $B'\backslash B$ und $B' \cap B$.

Da $v \leq w$ auf $\partial B'$, gilt $v \leq h$ $\partial B'$. Da v eine Unterlösung und h eine Lösung auf B' und $v \leq h$ $\partial B'$, folgt $v \leq h$ in B'. Es folgt: $w = v \leq h$ in $B'\backslash B$.

Wir haben $-Lw = -Lv$ in $B' \cap B$ und $w \leq h$ auf $\partial(B' \cap B)$. Das Maximumprinzip liefert $w \leq h$ in $B' \cap B$. Also $w \leq h$ in B' und w ist eine Unterlösung. □

Lemma 6.21. *Sei Ω ein Gebiet in $\mathbb{R}^n$ und L einer Operator gegeben wie in Bedingung 6.1. Seien a_{ij}, b_i und c C^α-Funktionen in Ω für ein $\alpha \in (0,1)$, $c \leq 0$ in Ω. Seien $f \in L^\infty(\Omega) \cap C^\alpha(\Omega)$ und $\varphi \in C(\partial\Omega)$. Wir definieren*

$$u_\varphi(x) := \sup\{v(x) \,|\, v \in C(\overline{\Omega}) \text{ ist eine Unterlösung in } \Omega \text{ und } v \leq \varphi \text{ auf } \partial\Omega\}.$$

Dann gilt $u \in C^{2,\alpha}(\Omega)$ und $-Lu = f$ in Ω.

Beweis. Wir setzen

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_\varphi = \{v \,|\, v \in C(\overline{\Omega}) \text{ ist eine Unterlösung in } \Omega \text{ und } v \leq \varphi \text{ auf } \partial\Omega\}.$$

$$u_\varphi(x) = \sup\{v(x) \,|\, v \in \mathcal{S}_\varphi\}.$$

Schritt 1. u_φ ist wohl-definiert. OBdA nehmen wir an, dass $\Omega \subset \{0 < x_1 < d\}$ für ein $d > 0$, und setzen

$$F = \sup_\Omega |f|, \quad \Phi = \sup_{\partial\Omega} |\varphi|.$$

Definiere

$$v_\pm = \pm\{\Phi + (e^{\gamma d} - e^{\gamma x_1})F\}.$$

Wir behauten dass gelten

$$\begin{aligned} -Lv_+ &\geq f, && \text{in } B_r(x_0) \\ v_+ &\geq \varphi && \text{auf } \partial B_r(x_0) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} -Lv_- &\leq f, && \text{in } B_r(x_0) \\ v_- &\leq \varphi && \text{auf } \partial B_r(x_0) \end{aligned}$$

für hinreichend groß γ. Eine direkte Berechnung liefert

$$-lv_+ = (a_{11}\gamma^2 + b_1\gamma)Fe^{\gamma x_1} - cv_+.$$

Wir wählen γ hinreichend groß, so dass

$$a_{11}\gamma^2 + b_1\gamma \geq 1.$$

Da $e^{\gamma x_1} \geq 1$, $c \leq 0$ unf $v_+ \geq 0$ in Ω, haben wir $-Lv_+ \geq F \leq f$ in Ω. Die Randbedingung $v_+ \geq \varphi$ ist offenbar. Analog gilt die Behauptung für v_-. Nach der Definition der $\mathcal{S}$, gilt $v_- \in \mathcal{S}$, d.h., $\mathcal{S} \neq \emptyset$. Beim Maximumprinzip, Lemma 6.18, gilt

$$v \leq v_+ \quad \text{in } \Omega, \quad \forall\, v \in \mathcal{S}.$$

Daher folgt, dass u_φ wohldefiniert ist und

$$u_\varphi \leq \quad \text{in } \Omega.$$

Schritt 2. Sind $v_1, v_2 \cdots, v_k$ in $\mathcal{S}_\varphi$, ist

$$v = \max\{v_1, v_2, \cdots, v_k\}$$

auch. (Übung)

Schritt 3. Für alle $B_r(x_0) \subset \Omega$, wir zeigen, dass $u_\varphi \in C^{2,\alpha}(B_r(x_0))$ und $-Lu_\varphi = f$ in $B_r(x_0)$.
Zuerst, nach Definition von u_φ, existiert eine Folge $\{v_i\} \subset \mathcal{S}$ mit

$$\lim_{i\to\infty} v_i(x_0) = u_\varphi(x_0).$$

Wir betonen, dass die folge von x_0 abhängt. Wir können v_i durch $\tilde{v}_i \in \mathcal{S}$ mit $\tilde{v}_i \geq v_i$ ersetzen, denn gilt

$$v_i(x_0) \leq \tilde{v}_i(x_0) \leq u_\varphi(x_0).$$

Beim Ersetzen, wann nötig, v_i durch $\max\{v_-, v_i\} \in \mathcal{S}$, können wir annehmen, dass gilt

$$v_- \leq v_i \leq u_\varphi \quad \text{in } \Omega.$$

Für die feste Kugel $B_r(x_0)$ und jede v_i, sei w_i die Liftung von v_i in $B_r(x_0)$. Nach Lemma 6.20 gilt $w_i \in \mathcal{S}$ mit $v_i \leq w_i$ in Ω. Daher gilt

$$\lim_{i\to\infty} w_i(x_0) = u_\varphi(x_0),$$

und

$$v_- \leq w_i \leq u_\varphi(x_0).$$

Insbesondere ist $\{w_i\}$ beschränkt und erfüllt $-Lw_i = f$. Nach deim Kompaktheitsatz, Korollar 6.9,, existiert eine Teilefolge, wir bezeichnen sie dennoch mit $\{w_i\}$, die gegen w in jeder kompakten Teilmenge von $B_r(x_0)$ konvergiert, wobei $-Lw = f$ in Ω gilt. Es ist leich zu nachprüfen, dass

$$w \leq u_\varphi \quad \text{in } B_r(x_0), \quad w(x_0) = u_\varphi(x_0).$$

Wir behaupten, dass $u_\varphi = w$ in $B_r(x_0)$. Angenommen, dass $y \in B_r(x_0)$ mit $w(y) < u_\varphi(y)$. Nach def Definition von u_φ existiert $V \in \mathcal{S}$ mit $w(y) < V(y) < u_\varphi(y)$. Wir betrachten $V_i = \max\{w_i, V\} \in \mathcal{S}$ und wie oben die Liftung W_i von V_i in $B_r(x_0)$. Wir erhalten die Grenzwert W von W_i und $-LW = f$ in $B_r(x_0)$. Es ist leicht to sehen, dass $w(x_0) = W(x_0) = u_\varphi(x_0)$, $w(y) < V(y) \leq W(y) \leq u_\varphi(y)$ und $w \leq W$ in $B_r(x_0)$. Ein Widerspruch zum Maximumprinzip. □

Lemma 6.22. *Sei Ω ein Gebiet in $\mathbb{R}^n$ und L einer Operator gegeben wie in Bedingung 6.1. Seien a_{ij}, b_i und c C^α-Funktionen in Ω für ein $\alpha \in (0,1)$, $c \leq 0$ in Ω. Seien $f \in L^\infty(\Omega) \cap C^\alpha(\Omega)$, $\varphi \in C(\partial\Omega)$ und u_φ die in Lemma 6.21 definierte Funktion. Für einen Punkt $x_0 \in \partial\Omega$ existiere $w_{x_0} \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ eine Barriere-Funktion, d.h., die*

$$\begin{aligned} -Lw_{x_0} &\geq 1 \quad && \text{in } \Omega, \\ w_{x_0}(x_0) &= 0, && \\ w_{x_0}(x) &> 0, && \forall x \in \partial\Omega \backslash \{x_0\}, \end{aligned}$$

erfüllt. Dann gilt

$$\lim_{x\to x_0} u_\varphi(x) = \varphi(x_0).$$

Beweis. Der Beweis ist ähnlich wie den Beweis für Theorem 5.18. (Übung.) □

Lemma 6.21, Lemma 6.22 und Lemma 5.17 impliziert

Theorem 6.23. *Sei Ω ein Gebiet in $\mathbb{R}^n$ mit einer äußeren Kugelbedingung in jedem Randpunkt von $\partial\Omega$ und L einer Operator gegeben wie in Bedingung 6.1. Seien a_{ij}, b_i und c beschränkte C^α-Funktionen in Ω für ein $\alpha \in (0,1)$, $c \le 0$ in Ω. Dann für $f \in L^\infty(\Omega) \cap C^\alpha(\Omega)$ und $\varphi \in C(\partial\Omega)$ existiert eine (eindeutige) Lösung $u \in C(\overline{\Omega}) \cap C^{2,\alpha}(\Omega)$ von dem Dirichletproblem*

$$\begin{aligned} -Lu &= f \qquad \text{in } \Omega, \\ u &= \varphi, \qquad \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

6.4. **Innere Regulärität.**

Lemma 6.24. *Sei Ω ein Gebiet in $\mathbb{R}^n$ und L einer Operator gegeben wie in Bedingung 6.1. Seien a_{ij}, b_i und c C^α-Funktionen in Ω mit beschränkter C^α-Norm. Sei $u \in C^2(\Omega)$ eine Lösung $-Lu = f$ in Ω. Ist $f \in C^\alpha(\Omega)$, so gilt $u \in C^{2,\alpha}(\Omega)$. Weiter, für alle $\Omega' \subset\subset \Omega$ gilt*

$$|u|_{C^{2,\alpha}(\Omega')} \le C\{|u|_{L^\infty}(\Omega) + |f|_{C^\alpha(\Omega)}\},$$

wobei $C > 0$ nur von n, α, λ, Λ, die C^α-Normen von a_{ij}, b_i und c, Ω' und $\operatorname{dist}(\Omega', \partial\Omega)$ abhängig ist.

Beweis. Für jede Kugel $B \subset \Omega$ zeigen wir $u \in C^{2,\alpha}(B)$. Betrachte das Dirichletrandproblem

$$\begin{aligned} -L_0 v = -(\textstyle\sum_{i,j} a_{ij}\partial_{ij} v + \sum_i b_i v_i) &= f + cu \qquad \text{in } \Omega, \\ v &= u, \qquad \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Nach der Voraussetzung $u \in C^2(\overline{B})$, gilt $f + cu \in C^\alpha(\overline{B})$. Nach Theorem 6.15 existiert eine Lösung $v \in C(\overline{B}) \cap C^{2,\alpha}(B)$. Beim der Eindeutigkeit gilt $u = v$ in B, als $u \in C^{2,\alpha}(B)$. Die Abschätzung folgt aus Theorem 6.8.

□

Definition 6.25 (Differenzquotient)**.** Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und $u : \Omega \to \mathbb{R}$. Für den Einheitsvektor e_l längs die x_l-Richtung definieren wir den *Diffenzquotient* von u in der Richtung e_l durch

$$\partial_j^h u(x) = \frac{1}{h}\big(u(x + he_l) - u)\big),$$

für alle $|h| < \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)$.

Lemma 6.26. *Es seien k eine positive Ganzzahl, u stetige Funktion in Ω und $\Omega' \subset\subset \Omega$.*

(1) Falls $u \in C^{k,\alpha}(\Omega)$, dann $\partial_l^h u \in C^{k-1,\alpha}(\Omega')$ und

$$|\partial_l^h u|_{C^{k-1,\alpha}(\Omega')} \le C|u|_{C^{k,\alpha}(\Omega)}$$

für alle $|h| < \operatorname{dist}(\Omega', \partial\Omega)$, wobei $C > 0$ nur von n, k und α abhängig ist.

(2) Es gelte $\partial_l^h u \in C^{k-1,\alpha}(\Omega')$ mit

$$|\partial_l^h u|_{C^{k-1,\alpha}(\Omega')} \le M$$

für alle $|h| < \operatorname{dist}(\Omega', \partial\Omega)$ und $l = 1, 2 \cdots, n$. Dann $u \in C^{k,\alpha}(\Omega')$ mit

$$|u|_{C^{k,\alpha}(\Omega')} \le CM,$$

wobei $C > 0$ nur von n, k und α abhängig ist.

Theorem 6.27. *Sei Ω ein Gebiet in $\mathbb{R}^n$ und L einer Operator gegeben wie in Bedingung 6.1. Seien a_{ij}, b_i und c $C^{k,\alpha}$-Funktionen in Ω mit beschränkter C^α-Normen, für ein $k \in \mathbb{Z}$ $(k \ge 0)$ und $\alpha \in (0,1)$. Sei $u \in C^2(\Omega)$ eine Lösung $-Lu = f$ in Ω. Ist $f \in C^{k,\alpha}(\Omega)$, so gilt $u \in C^{k+2,\alpha}(\Omega)$. Weiter, für alle $\Omega' \subset\subset \Omega$ gilt*

$$|u|_{C^{k+2,\alpha}(\Omega')} \le C\{|u|_{L^\infty}(\Omega) + |f|_{C^\alpha(\Omega)}\},$$

wobei $C > 0$ nur von n, k, α, λ, Λ, die C^α-Normen von a_{ij}, b_i und c, Ω' und $\operatorname{dist}(\Omega', \partial\Omega)$ abhängig ist. Falls a_{ij}, b_i, c und f glatt sind, ist u auch glatt.

Beweis. $k = 0$. Es folgt aus dem obigen Satz. Wir betrachten $k = 1$. Wir nehmen bliebige $\Omega_0 \subset\subset \Omega_1 \subset\subset \Omega$ und e_l $(l = 1, \cdots, n)$ und betrachten das Quotient von der Gleichung $-Lu = f$

$$-L(\partial_l^h u) = -\{\sum_{i,j} a_{ij}\partial_{ij}\partial_l^h u + \sum_i b_i \partial_i \partial_l^h u + c\partial_l^h u\} = F_l \text{ in } \Omega,$$

für $|h| < \text{dist}(\Omega_0, \partial\Omega_1)$, wobei

$$F_l := \sum_{i,j} \partial_l^h a_{ij}\partial_{ij}\bar{u} + \sum_i \partial_l^h b_i \partial_i \bar{u} + \partial_l^k c\bar{u}, \qquad \text{mit } \bar{u}(x) = u(x + he_l).$$

(Da gilt $\partial_l^h(f \cdot g)(x) = f(x)\partial_l^h g(x) + \partial_l^h f(x)\bar{g}(x)$ mit $\bar{g}(x) = g(x + he_l)$. Übung) Nach Lemma 6.26 (1) rehalten wir

$$|F|_{C^\alpha(\Omega_0)} \leq C\{|f|_{C^{1,\alpha}(\Omega_1)} + \Lambda_1 |u|_{C^{2,\alpha}(\Omega_1)}\},$$

wobei

$$\Lambda_1 = |a_{ij}|_{C^{1,\alpha}(\Omega_1)} + |b_i|_{C^{1,\alpha}(\Omega_1)} + |c|_{C^{1,\alpha}(\Omega_1)}.$$

Für jede $\Omega' \subset\subset \Omega_0$ gilt nach Thereom 6.8

$$|\partial_l^h u|_{C^{2,\alpha}(\Omega')} \leq C\{|f|_{C^{1,\alpha}(\Omega_1)} + \Lambda_1 |u|_{C^{2,\alpha}(\Omega_1)}\},$$

für jede $|h| < \text{dist}(\Omega_0, \partial\Omega_1)$. Nach Lemma 6.26 (2) haben wir $u \in C^{3,\alpha}(\Omega')$. Da Ω' bliebig ist, gilt $u \in C^{3,\alpha}(\Omega)$.

Für allgemeinene k benutzt man die Induktion. Angenommen, sind die Koeffizienten von L und f in $C^{k,\alpha}(\Omega)$ und $u \in C^{k+1,\alpha}(\Omega)$, nach der Induktionsannahme. Wir sollen $u \in C^{k+2,\alpha}(\Omega)$ zeigen. Nehme ein Multiindex $\gamma \in \mathbb{Z}_+^n$ mit $|\gamma| = k - 1$. Wir verwenden ∂^γ auf der Gleichung $Lu = f$ und erhalten

$$L(\partial^\gamma u) = f_\gamma,$$

wobei $f_\gamma = \partial^\gamma f + (lot)$. Hierbei ist (lot) eine Summe der Terme, die eine Produkte der Ableitungen von der Koeffizienten von Ordnung $\leq k - 1$ und der Ableitungen von u von Ordnung $\leq k$. Daher gilt $f_\gamma \in C^{1,\alpha}(\Omega)$. Wie wir gerade für $k = 1$ bewiesen haben, erhalten wir $\partial^\gamma u \in C^{3,\alpha}(\Omega)$, bzw., $u \in C^{k+2,\alpha}(\Omega)$. Die Aussage für $u \in C^\infty(\Omega)$ folgt auch. □

6.5. **Globale Schauder-Theorie.** Zuerst zeigen wir die Schauder-Abschäztung für dem Rand. Seien $B_R^+ = \{x \in B_R \,|\, x_n > 0\}$ die halbe Kugel und $\Sigma_R = B_R \cap \{x_n = 0\}$ eine Teile von dem Rand der halben Kugel B_R^+. Seien $k \geq 0$ eine Ganzzahl und $\alpha \in (0, 1)$. Wir definieren

$$|u|^*_{C^{k,\alpha}(B_R^+ \cup \Sigma_R)} = \sum_{i=0}^k R^i |\nabla^i u|_{L^\infty(B_R^+ \cup \Sigma_R)} + R^{k+\alpha}[\nabla^k u]_{C^\alpha(B_R^+ \cup \Sigma_R)}.$$

Theorem 6.28. *Seien $\Omega = B_R^+$ und L wie in Bedingung 6.1. Seien a_{ij}, b_i und c C^α-Funktionen in $B_R^+ \cup \Sigma_R$ für ein $\alpha \in (0, 1)$ mit*

$$|a_{ij}|^*_{C^\alpha(B_R^+ \cup \Sigma_R)} + R|b_i|^*_{C^\alpha(B_R^+ \cup \Sigma_R)} + R^2|c|^*_{C^\alpha(B_R^+ \cup \Sigma_R)} \leq \Lambda,$$

für eine Konstante Λ. Ist $u \in L^\infty(B_R^+) \cap C^{2,\alpha}(B_R^+ \cup \Sigma_R)$ eine Lösung von

$$\begin{aligned} -Lu &= f && \text{in } B_R^+, \\ u &= 0, && \text{auf } \Sigma_R, \end{aligned}$$

mit $|f|_{C^\alpha(B_R^+ \cup \Sigma_R)} < \infty$. Dann gilt

$$|u|^*_{C^{2,\alpha}(B_{R/2}^+ \cup \Sigma_{R/2})} \leq \big\{|u|_{L^\infty(B_R^+)} + R^2|f|^*_{C^\alpha(B_R^+ \cup \Sigma_R)}\big\},$$

wobei C nur von n, α, λ und Λ abhängig ist.

Beweis. Der Beweis läuft wie den Beweis für Thereom 6.7. Lemma 6.3, Lemma 6.4, Lemma6.6 und Theorem 6.7 gelten, wenn wir ersetzen B_R durch $B(x_0) \cap \{x_n = 0\}$ für $x_0 \in \{x_n \geq 0\}$.

□

Theorem 6.29. *Seien Ω beschränkt mit eine $C^{2,\alpha}$ Randteile $\Sigma \subset \partial\Omega$ und L wie in Bedingung 6.1. Seien a_{ij}, b_i und c C^α-Funktionen in $\Omega \cup \Sigma$ für ein $\alpha \in (0,1)$ mit*

$$|a_{ij}|_{C^\alpha(\Omega\cup\Sigma)} + |b_i|_{C^\alpha(\Omega\cup\Sigma)} + |c|_{C^\alpha(\Omega\cup\Sigma)} \le \Lambda,$$

für eine Konstante Λ. Ist $u \in L^\infty(\Omega) \cap C^{2,\alpha}(\Omega \cup \Sigma)$ eine Lösung von

$$\begin{aligned} -Lu &= f && \text{in } \Omega, \\ u &= \varphi, && \text{auf } \Sigma, \end{aligned}$$

mit $|f|_{C^\alpha(\Omega\cup\Sigma)} < \infty$ und $|\varphi|_{C^{2,\alpha}(\Omega\cup\Sigma)} < \infty$. Dann gilt für $\Omega' \subset \Omega$ mit $\operatorname{dist}(\Omega, \partial\Omega\backslash\Sigma) > 0$

$$|u|_{C^{2,\alpha}(\Omega')} \le \left\{ |u|_{L^\infty(\Omega)} + |f|_{C^\alpha(\Omega\cup\Sigma)} + |\varphi|_{C^{2,\alpha}(\Omega\cup\Sigma)} \right\},$$

]wobei C nur von n, α, λ, Λ, Ω' und $\operatorname{dist}(\Omega, \partial\Omega\backslash\Sigma)$ abhängig ist.

Beweis. Für ein festes $x_0 \in \Sigma$ finden wir eine $C^{2,\alpha}$-Abbildung T derart, so dass $T((\Sigma \cap B_r(x_0))$ in $\{x_n = 0\}$ enthielt. Dann verwenden wir Theorem 6.28. □

Als Folgerung erhalten wir

Theorem 6.30 (Gloable Schauder-Abschätzung)**.** *Seien Ω beschränkt mit einem $C^{2,\alpha}$ Rand und L wie in Bedingung 6.1. Seien a_{ij}, b_i und c C^α-Funktionen in $\overline{\Omega}$ für ein $\alpha \in (0,1)$ mit*

$$|a_{ij}|_{C^\alpha(\overline{\Omega})} + |b_i|_{C^\alpha(\overline{\Omega})} + |c|_{C^\alpha(\overline{\Omega})} \le \Lambda,$$

für eine Konstante Λ. Ist $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ eine Lösung von

$$\begin{aligned} -Lu &= f && \text{in } \Omega, \\ u &= \varphi, && \text{auf } \partial\Omega, \end{aligned}$$

mit $|f|_{C^\alpha(\overline{\Omega})} < \infty$ und $|\varphi|_{C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})} < \infty$. Dann gilt

$$|u|_{C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})} \le \left\{ |u|_{L^\infty(\Omega)} + |f|_{C^\alpha(\overline{\Omega})} + |\varphi|_{C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})} \right\},$$

wobei C nur von n, α, λ, Λ und Ω abhängig ist.

6.6. $C^{2,\alpha}$-Randwertproblem.

Lemma 6.31. *Seien Ω beschränkt mit einem $C^{2,\alpha}$ Rand und L wie in Bedingung 6.1. Seien a_{ij}, b_i und c C^α-Funktionen in $\overline{\Omega}$ für ein $\alpha \in (0,1)$ mit $c \le 0$ in Ω. Falls das Dirichletrandwertproblem*

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f && \text{in } \Omega, \\ u &= \varphi, && \text{auf } \partial\Omega, \end{aligned}$$

für alle $f \in C^\alpha(\overline{\Omega})$ und $\varphi \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ eine $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$-Lösung $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ besitzt, dann besitzt das Dirichletrandwertproblem

$$\begin{aligned} -Lu &= f && \text{in } \Omega, \\ u &= \varphi, && \text{auf } \partial\Omega, \end{aligned}$$

auch eine $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$-Lösung.

Beweis. Der Beweis basiert auf der Kontinuitätsmethode, s. Theorem 6.13 und Theorem 6.14. OBdA können wir annemhen, dass $\varphi = 0$. Ansonst betrachten wir $-Lv = f + L\varphi$ in Ω, $v = 0$ auf $\partial\Omega$.

Wir betrachten die Familie der Gleichungen

$$-L_t u = f,$$

mit den Operatoren $L_t : X \to Y$

$$L_t := tLu + (1-t)\Delta u,$$

wobei

$$X = \{u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}) \mid u = 0 \text{ auf } \partial\Omega\}, \quad Y = C^\alpha(\overline{\Omega}).$$

Die Bedingung

$$\|u\|_X \le C\|L_t u\|_Y$$

folgt aus Theorem 6.30 mit Lemma 5.19 für Ω. Nach Theorem 6.13 gilt die Aussage. □

Weil wir Lemma 5.19 nur für $\Omega = B$ gezeigt haben, erhalten wir Lemma 6.31 nur für $\Omega = B$. Dies ist genug für den Folgenden Anwendungen.

Korollar 6.32. *Sei $\Omega = B$ eine Kugel in $\mathbb{R}^n$ und L wie in Bedingung 6.1. Seien a_{ij}, b_i und c C^α-Funktionen in $\overline{B}$ für ein $\alpha \in (0,1)$ mit $c \leq 0$ in B. Dann für alle $f \in C^\alpha(\overline{B})$ und $\varphi \in C^{2,\alpha}(\overline{B})$ existiert eine $C^{2,\alpha}(\overline{B})$-Lösung u vom Dirichletrandwertproblem*

$$\begin{aligned} -Lu &= f \qquad \text{in } B, \\ u &= \varphi, \qquad \text{auf } \partial B. \end{aligned}$$

Beweis. Die Lösbarkeit vom Dirichletrandwertproblem für die Poissongleichung $-\Delta u = f$ haben wir schon in Theorem 4.20 bewiesen. □

Das Korollar gilt auch für eine Randteile.

Korollar 6.33. *Seien $\Omega = B$ eine Kugel in $\mathbb{R}^n$, $\Sigma \subset \partial B$ eine $C^{2,\alpha}$ Randteile und L wie in Bedingung 6.1. Seien a_{ij}, b_i und c C^α-Funktionen in $\overline{B}$ für ein $\alpha \in (0,1)$ mit $c \leq 0$ in B. Dann für alle $f \in C^\alpha(\overline{B})$ und $\varphi \in C(\partial B) \cap C^{2,\alpha}(B \cup \Sigma)$ existiert eine $C(\partial B) \cap C^{2,\alpha}(B \cup \Sigma)$-Lösung u vom Dirichletrandwertproblem*

$$\begin{aligned} -Lu &= f \qquad \text{in } B, \\ u &= \varphi, \qquad \text{auf } \partial B. \end{aligned}$$

Nun können wir die Existenz einer $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ für allen $C^{2,\alpha}$-Gebiete zeigen.

Theorem 6.34. *Sei Ω beschränkt und $C^{2,\alpha}$ und L wie in Bedingung 6.1. Seien a_{ij}, b_i und c C^α-Funktionen in $\overline{\Omega}$ für ein $\alpha \in (0,1)$ mit $c \leq 0$ in Ω. Dann für alle $f \in C^\alpha(\overline{\Omega})$ und $\varphi \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ existiert eine $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$-Lösung u vom Dirichletrandwertproblem*

$$\begin{aligned} -Lu &= f \qquad \text{in } \Omega, \\ u &= \varphi, \qquad \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Beweis. Nach Theorem 6.23 existiert eine Lösung $u \in C(\overline{\Omega}) \cap C^{2,\alpha}(\Omega)$. Was sollen wir noch zeigen ist $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$. □