folgt aus Theorem 6.30 mit Lemma 5.19 für Ω. Nach Theorem 6.13 gilt die Aussage.

$\square$

Weil wir Lemma 5.19 nur für $\Omega = B$ gezeigt haben, erhalten wir Lemma 6.31 nur für $\Omega = B$. Dies ist genug für den Folgenden Anwendungen.

Korollar 6.32. *Sei $\Omega = B$ eine Kugel in $\mathbb{R}^n$ und L wie in Bedingung 6.1. Seien a_{ij}, b_i und c C^α-Funktionen in $\overline{B}$ für ein $\alpha \in (0,1)$ mit $c \leq 0$ in B. Dann für alle $f \in C^\alpha(\overline{B})$ und $\varphi \in C^{2,\alpha}(\overline{B})$ existiert eine $C^{2,\alpha}(\overline{B})$-Lösung u vom Dirichletrandwertproblem*

$$\begin{aligned} -Lu &= f \qquad \text{in } B, \\ u &= \varphi, \qquad \text{auf } \partial B. \end{aligned}$$

Beweis. Die Lösbarkeit vom Dirichletrandwertproblem für die Poissongleichung $-\Delta u = f$ haben wir schon in Theorem 4.20 bewiesen. $\square$

Das Korollar gilt auch für eine Randteile.

Korollar 6.33. *Seien $\Omega = B$ eine Kugel in $\mathbb{R}^n$, $\Sigma \subset \partial B$ ein (relativ offenes) Randteil und L wie in Bedingung 6.1. Seien a_{ij}, b_i und c C^α-Funktionen in $\overline{B}$ für ein $\alpha \in (0,1)$ mit $c \leq 0$ in B. Dann für alle $f \in C^\alpha(\overline{B})$ und $\varphi \in C(\partial B) \cap C^{2,\alpha}(B \cup \Sigma)$ existiert eine $C(\partial B) \cap C^{2,\alpha}(B \cup \Sigma)$-Lösung u vom Dirichletrandwertproblem*

$$\begin{aligned} -Lu &= f \qquad \text{in } B, \\ u &= \varphi, \qquad \text{auf } \partial B. \end{aligned}$$

Beweis. Wir zeigen das Korollar durch eine Approximation. Sei $x_0 \in \Sigma$. Wir setzen φ stetig auf $B_{1+\varepsilon}$ mit $\varphi \in C(B') \cap C^{2,\alpha}(\overline{B}_r(x_0))$ fort, wobei $r < \varepsilon$ klein ist. Wählen $\varphi : k$ eine Folge von C^3-Funktionen derart, so dass $\varphi_k \to \varphi$ gleichmäßig in $\overline{B}$ und

$$\sup_{k \geq 1} |\varphi_k|_{C^{2,\alpha}(\overline{B}_r(x_0))} \leq C|\varphi|_{C^{2,\alpha}(\overline{B}_r(x_0))}.$$

Für jedes $k \geq 1$, sei $u_k \in C^{2,\alpha}(\overline{B})$ die Lösung von

$$\begin{aligned} -Lu &= f \qquad \text{in } B, \\ u &= \varphi_k, \qquad \text{auf } \partial B. \end{aligned}$$

Die Existenz ist vom Lemma 6.32 gesichert. Nach dem Maximumprinzip erhalten wir

$$\sup_B |u_k - u_l| \leq \sup_{\partial B} |\varphi_k - \varphi_l|.$$

Daher konvergiert $\{u_k\}$ gegen eine $u \in C(\overline{B})$ mit $u = \varphi$ auf ∂B. Nach der Kompaktheitsatz, Korollar 6.9, existiert eine Teilfolge von $u_k\}$, die in allen kompakten Teilmengen von B gegen u konvergiert. Also $-Lu = f$ in $\mathcal{B}$. Nach Theorem 6.29 erhalten wir

$$|u_k|_{C^{2,\alpha}(B_{r/2}(x_0)\cap B)} \leq C\{|u_k|_{L^\infty(B)} + |\varphi_k|_{C^{2,\alpha}(B_r(x_0)\cap B)} + |f|_{C^\alpha(B)}\}$$

Nach Arzela-Ascoli können wir zeigen, dass u die ähnliche Abschätzung mit dem Ersetzen von φ_k durch φ besitzt. Insbesondere gilt $u \in C^{2,\alpha}(B_{r/2}(x_0) \cap B))$.

$\square$

Nun können wir die Existenz einer $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$-Lösung für allen $C^{2,\alpha}$-Gebiete zeigen.

Theorem 6.34. *Sei Ω beschränkt und $C^{2,\alpha}$ und L wie in Bedingung 6.1. Seien a_{ij}, b_i und c C^α-Funktionen in $\overline{\Omega}$ für ein $\alpha \in (0,1)$ mit $c \leq 0$ in Ω. Dann für alle $f \in C^\alpha(\overline{\Omega})$ und $\varphi \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ existiert eine $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$-Lösung u vom Dirichletrandwertproblem*

$$\begin{aligned} -Lu &= f \qquad \text{in } \Omega, \\ u &= \varphi, \qquad \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Beweis. Nach Theorem 6.23 existiert eine Lösung $u \in C(\overline{\Omega}) \cap C^{2,\alpha}(\Omega)$. Was sollen wir noch zeigen ist $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$. Für $x_0 \in \partial\Omega$ wählen wir eine $C^{2,\alpha}$-Abbildung derart, so dass $B_r(x_0) \cap \Omega$ wird nach einem Teil von B, bzw $B_r(x_0) \cap \partial\Omega$ nach einem Teil von ∂B abgebildet. Die Aussage folgt aus Korollar 6.33

□

6.7. **Globale höhere Regulärität.** Seien $B_R^+ = \{x \in B_R \,|\, x_n > 0\}$ die halbe Kugel und $\Sigma_R = B_R \cap \{x_n = 0\}$ eine Teile von dem Rand der halben Kugel B_R^+. Seien $k \geq 0$ eine Ganzzahl und $\alpha \in (0,1)$. Wir definieren

$$|u|^*_{C^{k,\alpha}(B_R^+ \cup \Sigma_R)} = \sum_{i=0}^{k} R^i |\nabla^i u|_{L^\infty(B_R^+ \cup \Sigma_R)} + R^{k+\alpha}[\nabla^k u]_{C^\alpha(B_R^+ \cup \Sigma_R)}.$$

Theorem 6.35. *Seien $\Omega = B_R^+$ und L wie in Bedingung 6.1. Seien a_{ij}, b_i und c $C^{k,\alpha}$-Funktionen in $B_R^+ \cup \Sigma_R$ für ein $\alpha \in (0,1)$ für eine Konstante Λ. Ist $u \in C(\overline{B}_R^+) \cap C^2(B_R^+)$ eine Lösung von*

$$\begin{aligned} -Lu &= f \qquad \text{in } B_R^+, \\ u &= \varphi, \qquad \text{auf } \Sigma_R, \end{aligned}$$

mit $|f|_{C^{k,\alpha}(B_R^+ \cup \Sigma_R)} < \infty$ und $|\varphi|_{C^{k+2,\alpha}(B_R^+ \cup \Sigma_R)} < \infty$. Dann gilt $u \in C^{k+\alpha}(B_R^+ \cup \Sigma_R)$. Weiter gilt

$$|u|^*_{C^{k+2,\alpha}(B_{R/2}^+ \cup \Sigma_{R/2})} \leq \left\{ |u|_{L^\infty(B_R^+)} + |\varphi|_{C^{k+2,\alpha}(B_R^+ \cup \Sigma_R)} + |f|^*_{C^{k,\alpha}(B_R^+ \cup \Sigma_R)} \right\},$$

wobei C nur von n, α, λ und die $C^{k,\alpha}$-Normen von a_{ij}, b_i, c abhängig ist.

Beweis. Induktion. $k = 1$. Wir in den Beweis von Theorem 6.27 können wir $\partial_l u \in C^{2,\alpha}(B_R^+ \cup \Sigma_R)$ für $l = 1, \cdots, n-1$ zeigen. Also haben wir $\partial_{ijl} \in C^\alpha(B_R^+ \cup \Sigma_R)$ für $i, j = 1, \cdots, n$ und $l = 1, \cdots, n-1$. Dann folgt $\partial_{nnn} u \in C^\alpha(B_R^+ \cup \Sigma_R)$ aus der Gleichung. □

Theorem 6.36. *Seien Ω beschränkt mit einem $C^{k+2,\alpha}$-Randteil $\Sigma \subset \partial\Omega$ für eine Ganzzahl $k \geq 0$ und ein $\alpha \in (0,1)$ und L wie in Bedingung 6.1. Seien a_{ij}, b_i und c $C^{k,\alpha}$-Funktionen in $\Omega \cup \Sigma_R$. für eine Konstante Λ. Ist $u \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ eine Lösung von*

$$\begin{aligned} -Lu &= f \qquad \text{in } B_R^+, \\ u &= \varphi, \qquad \text{auf } \Sigma_R, \end{aligned}$$

mit $|f|_{C^{k,\alpha}(\Omega + \cup \Sigma_R)} < \infty$ und $|\varphi|_{C^{k+2,\alpha}(\Omega + \cup \Sigma_R)} < \infty$. Dann gilt $u \in C^{k+\alpha}(\Omega \cup \Sigma)$. Weiter, gilt für alle $\Omega' \subset\subset \Omega$ mit $\operatorname{dist}(\Omega', \partial\Omega \backslash \Sigma) > 0$

$$|u|_{C^{k+2,\alpha}(\Omega')} \leq \left\{ |u|_{L^\infty(\Omega)} + |\varphi|_{C^{k+2,\alpha}(\Omega \cup \Sigma_R)} + |f|_{C^{k,\alpha}(\Omega \cup \Sigma_R)} \right\},$$

wobei C nur von n, α, λ und die $C^{k,\alpha}$-Normen von a_{ij}, b_i, c, Ω' und $\operatorname{dist}(\Omega', \partial\Omega \backslash \Sigma)$ abhängig ist.

Theorem 6.37. *Seien Ω beschränkt mit einem $C^{k+2,\alpha}$-Rand für eine Ganzzahl $k \geq 0$ und ein $\alpha \in (0,1)$ und L wie in Bedingung 6.1. Seien a_{ij}, b_i und c $C^{k,\alpha}$-Funktionen in $\overline{\Omega}$. für eine Konstante Λ. Ist $u \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ eine Lösung von*

$$\begin{aligned} -Lu &= f \qquad \text{in } B_R^+, \\ u &= \varphi, \qquad \text{auf } \Sigma_R, \end{aligned}$$

mit $|f|_{C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})} < \infty$ und $|\varphi|_{C^{k+2,\alpha}(\overline{\Omega})} < \infty$. Dann gilt $u \in C^{k+\alpha}(\overline{\Omega})$. Weiter, gilt für alle $\Omega' \subset\subset \Omega$ mit $\operatorname{dist}(\Omega', \partial\Omega \backslash \Sigma) > 0$

$$|u|_{C^{k+2,\alpha}(\overline{\Omega})} \leq \left\{ |u|_{L^\infty(\Omega)} + |\varphi|_{C^{k+2,\alpha}(\overline{\Omega})} + |f|_{C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})} \right\},$$

wobei C nur von n, α, λ und die $C^{k,\alpha}$-Normen von a_{ij}, b_i, c und Ω abhängig ist.

7. Krylov-Safanov-Theorie

7.1. Das Maximumprinzip von Alexandrov und Bakelman.

Definition 7.1 (Obere Kontaktmenge). (1) Für jede $u \in C^2(\Omega)$ definieren wir die *obere Kontaktmenge* durch

$$\Gamma^+ := \{y \in \Omega \,|\, u(x) \leq u(y) + \nabla u(y) \cdot (x-y) \quad \forall x \in \Omega\}.$$

(2) für ein $\alpha \in (0,1)$ Für jede $u \in C(\Omega)$ definieren wir die *obere Kontaktmenge* durch

$$\Gamma^+ := \{y \in \Omega \,|\, \exists\, p = p(y) \in \mathbb{R}^b : u(x) \leq u(y) + p \cdot (x-y), \quad \forall x \in \Omega\}.$$

(3) Die hyperebene $E_y := \{(x, u(y) + p \cdot (x-y)) \in \mathbb{R}^{n+1}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n\}$ heißt *Stützebene* (oder Stützhyperebene) von der Graph von u in Punkt $(x, u(x))$.

(4) $\tau_u(y) := \{p \in \mathbb{R}^n \,|\, u(x) \leq u(y) + p \cdot (x-y), \quad \forall x \in \Omega\}$.

Bemerkung 7.2. We bemerken

(1) Seien $u \in C^2(\Omega)$ und $\nabla^2 u = (\partial_{ij} u)$ die Hessesche von u. Dann ist $\nabla^2 u$ in Γ^+ nicht-positiv semidefinit. (Übung)
(2) $u \in C(\Omega)$ ist genau dann konkav, wann $\Gamma^+ = \Omega$.
(3) Wenn $u \in C^1(\Omega)$, dann $p = \nabla u(x)$ und ist jede Stützebene Tangentialebene von der Graph.
(4) $\Gamma^+ = \{y \in \Omega \,|\, \tau_u(y) \neq \emptyset\}$.

Beispiel 7.3. Sei $u \in C(B_R(x_0))$ definiert durch.

$$v(x) = h\left(1 - \frac{|x - x_0|}{R}\right)$$

Der Graph von v ist ein Kegel mit Spitze der Höhe h im Nullpunkt und der Sphäre $\partial B_R(x_0)$ als Basis. Die Menge der Steigerungen τ_v von v ist $B_{h/R}$ und $\tau_v(x_0) = \tau_v(B_R(x_0))$. (Übung)

Lemma 7.4. *Seien $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ eine nicht-negative Funktion. Dann gilt für jede $u \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$*

$$\int_{B_{\tilde{M}}} g(p)dp \leq \int_{\Gamma^+} g(\nabla u) |\det \nabla^2 u| dx,$$

wobei

$$\tilde{M} = (\sup_\Omega u - \sup_{\partial\Omega} u^+)/d$$

mit $d = \operatorname{diam}(\Omega)$.

Beweis. OBdA können wir annemhen, dass $u \leq 0$ auf $\partial\Omega$. Ansonst betrachten wir $u - \sup_{\partial\Omega} u^+$.

Schritt 1. Es gilt

$$\int_{\nabla u(\Gamma^+ \cap \Omega^+)} g(p)dp \leq \int_{\Gamma^+ \cap \Omega^+} g(\nabla u) |\det \nabla^2 u| dx, \tag{7.1}$$

wobei $\Omega^+ := \{u > 0\}$.

Die Abbildung ∇u bildet $\Gamma^+ \cap \Omega^+$ nach $\nabla u(\Gamma^+ \cap \Omega^+) \subset \mathbb{R}^n$ ab und $|\det(\nabla^2 u)|$ die Jacobi-Matrix Falls ∇u diffeomorphismus ist, ist (7.1) die Substitutionsformel. Wir betrachten $\chi_\varepsilon := \nabla u - \varepsilon \mathrm{Id} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ mit $\varepsilon > 0$. Dann ist die Jacobi-Matrix von χ_ε, $\nabla \chi_\varepsilon = \nabla^2 u - \varepsilon I$. Da $\nabla^2 u$ in Γ^+ nicht-positiv semidefinit ist, ist χ_ε negativ definite. Dann erhalten wir

$$\int_{\nabla \chi_\varepsilon(\Gamma^+ \cap \Omega^+)} g(p)dp \leq \int_{\Gamma^+ \cap \Omega^+} g(\nabla u) |\det \nabla^2 u - \varepsilon I| dx.$$

Es impliziert (7.1) wann wir $\varepsilon \to 0$ lassen.

Schritt 2. Wir nehmen an, dass $M = \sup_\Omega > 0$. Behauptung:

$$B_{M/d} \subset \nabla u(\Gamma^+ \cap \Omega^+). \tag{7.2}$$

D.h., für $a \in R^n$ mit $|a| < M/d$ existiert ein $x_a \in \Gamma^+ \cap \Omega^+$ mit $a = \nabla u(x_a)$.

OBda nehmen wir an, dass u in $0 \in \Omega$ das Maximum annimmt. Für $a \in R^n$ mit $|a| < M/d$ betrachten wir

$$u_a(x) := u(x) - a \cdot x.$$

Es ist leicht zu prüfen, dass $u_a(0) = M > 0$ gilt und für allen $x \in \partial\Omega$

$$u_a(x) \leq -a \cdot x < M.$$

Daraus nimmt die funktion u_a ihres Maximum in $x_a \in \Omega$ mit $u_a(x_a) \geq M$. Es folgt

$$u(x_a) = u_a(x_a) + a \cdots x_a \geq M + a \cdot x_a > 0$$

und

$$u(x) \leq u_a(x_a) + a \cdot xu(x_a) + a \cdot (x - x_a), \quad \forall x \in \Omega.$$

Nach Definition gilt $x_a \in \Gamma^+ \cap \Omega^+$ mit $a = \nabla u(x_a)$.

Die Aussage folgt aus (7.1) und (7.2). □

Als einer spezielle Fall gilt

Korollar 7.5. *Seien $\Omega \in \mathbb{R}^n$ beschränkt. Dann gilt für jede $u \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$*

$$\sup_{\Omega} u \leq \sup_{\partial\Omega} u^+ + \frac{d}{\sqrt[n]{\omega_n/n}} \left(\int_{\Gamma^+} |\det \nabla^2 u| dx \right)^{\frac{1}{n}},$$

wobei $d = \operatorname{diam}(\Omega)$.

Beweis. $g = 1$. □

Korollar 7.6. *Seien $\Omega \in \mathbb{R}^n$ beschränkt, $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ eine nicht-negative Funktion und a_{ij} stetig in Ω mit $a_{ij} = a_{ji}$ und $(a_{ij}(x))$ positiv definit. Dann gilt für jede $u \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$*

$$\int_{B_{\tilde{M}}} g(p)dp \leq \int_{\Gamma^+} g(\nabla u) \left(\frac{-a_{ij}\partial_{ij} u}{nD^*} \right)^n dx,$$

wobei $D^* = \sqrt[n]{\det(a_{ij})}$ und $\tilde{M} = (\sup_\Omega u - \sup_{\partial\Omega} u^+)/d$ mit $d = \operatorname{diam}(\Omega)$.

Beweis. Da die Matrix $A = (a_{ij})$ positive definit ist, haben wir

$$\det(A) \cdot \det(-\nabla^2 u) \leq \left(\frac{-a_{ij}\partial_{ij} u}{n} \right)^n \quad \text{in } \Gamma^+.$$

□

Lemma 7.7. *Seien Ω beschränkt und konvex und $u \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ eine konkave Funktion mit $u = 0$ auf $\partial\Omega$. Dann gilt für $x_0 \in \Omega$*

$$\big(u(x_0)\big)^n \leq C(\operatorname{diam}(\Omega))^{n-1} \operatorname{dist}(x_0, \partial\Omega) \int_{\Omega} |\det \nabla^2 u|^2 dx,$$

wobei $C > 0$ nur von n abhängig ist und $d = \operatorname{diam}(\Omega)$.

Beweis. Aus der Konkavität von u gilt $u \geq 0$ in Ω. OBdA annehmen wir an, dass $u > 0$ in Ω. Fixiere $x_0 \in \Omega$. Beim Nehmenen $g = 1$ in (7.1) erhalten wir

$$|\nabla u(\Omega)| \leq \int_{\Omega} |\det(\nabla^2 u)| dx. \tag{7.3}$$

Sei v eine konkave Funktion, welcher Graph ein Kegel mit Spitze $(x_0, u(x_0))$ und dem Gebiet Ω als Basis ist, mit $v = 0$ auf $\partial\Omega$. Eigentlich kann man v so definieren, dass

$$v(tx_0 + (1-t)\tilde{x}) = tu(x_0).$$

$u(x_0)$ ist dei Hohe des Kegels. Nach der konkavität von u und $u = v = 0$ auf $\partial\Omega$ erhaten wir $v \leq u$ in Ω. Setze

$$\mathcal{S} := \tau_v(x_0) = \{p \in \mathbb{R}^n \mid v(x) \leq v(x_0) + p \cdot (x - x_0) \text{ in } \Omega\}.$$

Wie in den Beweis von (7.2) können wir

$$\mathcal{S} \subset \nabla u(\Omega). \tag{7.4}$$

zeigen. (Übung) Setze $D = \operatorname{diam}(\Omega)$ und $d = \operatorname{dist}(x_0, \partial\Omega)$. Wir behaupten

$$\left(\frac{v(x_0)}{D}\right)^{n-1} \cdot \frac{v(x_0)}{d} \leq C|\mathcal{S}|, \tag{7.5}$$

wobei $C > 0$ eine nur von n anhängige Konstante ist. Die Aussage folgt aus (7.3), (7.4) und (7.5).

Nun zeigen wir (7.5). Erstens haben wir

$$B_{v(x_0)/D} \subset \mathcal{S}. \tag{7.6}$$

Denn für $p \in B_{v(x_0)/D}$ gilt

$$v(x) \leq v(x_0) + p \cdot (x - x_0), \quad \forall x \in \Omega.$$

(Für $\tilde{x} \in \partial\Omega$ und $x = tx_0 + (1-t)\tilde{x}$ gilt

$$v(x) = tv(x_0)$$

und

$$\begin{aligned} v(x_0) + p \cdot (x - x_0) &= v(x_0) + (1-t)p \cdot (\tilde{x} - x_0) \\ &\leq v(x_0) + (1-t)\frac{v(x_0)}{D}D \\ &= tv(x_0) = v(x).) \end{aligned}$$

Zweitens, haben wir

$$\exists\, p_0 \in \mathcal{S} \text{ mit } |p_0| = v(x_0)/d. \tag{7.7}$$

Um dies zu zeigen, nehmen wir $\tilde{x} \in \partial\Omega$ mit $\tilde{x} - x_0 = d$. Sei H eine Stützebene von Ω in Punkt $\tilde{x}$ in $\mathbb{R}^n$. Die Existenz folgt aus der konvexität von Ω. Die Hyperebene $\widetilde{H} \subset \mathbb{R}^{n+1}$, die von H und $(x_0, v(x_0))$ aufgespannt ist, ist eine Stützebene von V mit der Steigerung p_0. Es ist klar, dass $|p_0| = v(x_0)/d$.

Da $\mathcal{S}$ konvex ist, enthielt $\mathcal{S}$ die konvexe Hülle von $B_{v(x_0)/D}$ und p_0. Es ist nun leicht to zeigen, dass

$$C\left(\frac{v(x_0)}{D}\right)^{n-1} \cdot \frac{v(x_0)}{d} \leq |\mathcal{S}|.$$

□

Nun können wir das Maximumprinzip von Alexandrov zeigen, indem das Supremum von Lösungen von L^n-Normen des inhomogenen Terms abgeschätzen lassen.

Theorem 7.8 (Maximumprinzip von Alexandrov)**.** *Seien $\Omega \in \mathbb{R}^n$ beschränkt und a_{ij} stetig in Ω mit $a_{ij} = a_{ji}$ und $(a_{ij}(x))$ positiv definit. Genüge $u \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$*

$$-\sum_{i,j} a_{ij}\partial_{ij} u \leq f \quad \text{in } \Omega$$

für ein $f \in C(\Omega)$. Dann gilt

$$\sup_{\Omega} \leq \sup_{\partial\Omega} u^+ + Cd \left\| \frac{f^+}{D^*} \right\|_{L^n(\Gamma^+)},$$

wobei Γ^+ die obere Kontaktmenge von u ist, $D^* = \sqrt[n]{\det(a_{ij})}$, $d = \operatorname{diam}(\Omega)$ und $C > 0$ eine nur von n abhängige Konstante ist.

Beweis. $g = 1$ in Korollar 7.6. □

Bemerkung 7.9. (1) Die Integralbereich Γ^+ in Theorem 7.8 kann durch

$$\Gamma^+ \cap \{x \in \Omega \,|\, u(x) > \sup_{\partial\Omega} u^+\}$$

ersetzt werden.

(2) Man braucht keine gleichmäßige Elliptizität. Dies ist wichtig für den Anwendungen auf nichtlinearer Gleichungen.
(3) Der Satz gilt eigentlich für messbare und beschänkte a_{ij}, $f \in L^n(\Omega)$ und $u \in W^{2,n}(\Omega)$.

Nun haben wir ein mehr allgemeines Maximumprinzip

Theorem 7.10. *Seien $\Omega \in \mathbb{R}^n$ beschränkt und a_{ij}, b_i, c und f stetig in Ω mit $a_{ij} = a_{ji}$ und $(a_{ij}(x))$ positiv definit, b_i/D^*, $f/D^* \in L^n(\Omega)$ und $c \le 0$ in Ω. Genüge $u \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$*

$$-\{\sum_{i,j} a_{ij}\partial_{ij}u + b_i\partial_j u + cu\} \le f \qquad \text{in } \Omega.$$

Dann gilt

$$\sup_{\Omega} \le \sup_{\partial\Omega} u^+ + Cd \left\| \frac{f^+}{D^*} \right\|_{L^n(\Gamma^+)},$$

wobei Γ^+ die obere Kontaktmenge von u ist, $D^* = \sqrt[n]{\det(a_{ij})}$ und $C > 0$ eine nur von n, diam(Ω) *und $\|\mathbf{b}/D^*$ mit $\mathbf{b} = |(b_1, \cdots, b_n)|$ abhängige Konstante ist. Eigentlich ist C gleich*

$$\left\{ \exp\left\{ \frac{2^{n-2}}{\omega_n n^n} \left(\left\| \frac{\mathbf{b}}{D^*} \right\|^n_{L^n(\Gamma^+)} + 1 \right) \right\} - 1 \right\}.$$

Beweis. Wir verwenden Korollar 7.6 mit einer geeigenten Funktion g. Wir bemerken, dass

$$(-\sum_{i,j} a_{ij}\partial_{ij}u)^n \le |\mathbf{b}|^n |\nabla u|^n \qquad \text{in } \Omega,$$

falls $f \equiv 0$ und $c \equiv 0$. Dies suggeriert, dass wir $g(p) = |p|^{-n}$ wählen sollen. Aber solche Funktion ist nicht lokal integrabel um 0. Wir wählen $g(p) = (|p|^n + \mu^n)^{-1}$ und lassen $\mu \to 0$.

Wie in Lemma 7.4 können wir annemhen, dass $u \le 0$ auf $\partial\Omega$ und setzen $\Omega^+ = \{u > 0\}$. Nach der Cauchy-Schwarz-Ungleichung gilt

$$\begin{aligned} -a_{ij}\partial_{ij}u &\le b_i\partial_i u + cu + f \\ &\le b_i\partial_i u + f \qquad \text{in } \Omega^+ \\ &\le |\mathbf{b}| \cdot |Du| + f^+ \qquad \text{in } \Omega^+ \\ &\le \left(|\mathbf{b}|^n + \frac{(f^+)^n}{\mu^n} \right)^{\frac{1}{n}} \cdot (|Du|^n + \mu^n)^{\frac{1}{n}} \cdot (1+1)^{\frac{n-2}{n}}, \qquad \text{in } \Omega^+, \end{aligned}$$

bzw

$$(-a_{ij}\partial_{ij}u)^n \le \left(|\mathbf{b}|^n + \frac{(f^+)^n}{\mu^n} \right) \cdot (|Du|^n + \mu^n) 2^{n-2}, \qquad \text{in } \Omega^+.$$

Nun wählen wir

$$g(p) = \frac{1}{|p|^n + \mu^n}.$$

Korollar 7.6 liefert

$$\int_{B_{\tilde{M}}} g(p)dp \le \frac{2^{n-2}}{n^n} \int_{\Gamma^+ \cap \Omega^+} \frac{|\mathbf{b}|^n + \mu^{-n}(f^+)^n}{(D^*)^n} dx.$$

Wir berechnen

$$\int_{B_{\tilde{M}}} g(p)dp = \omega_n \int_0^{\tilde{M}} \frac{r^{n-1}}{r^n + \mu^n} dr = \frac{\omega_n}{n} \log \frac{\tilde{M}^n + \mu^n}{\mu^n} = \frac{\omega_n}{n} \log(\frac{\tilde{M}^n}{\mu^n} + 1).$$

Daher erhalten wir

$$\tilde{M}^n \le \mu^n \cdot \left\{ \exp\left\{ \frac{2^{n-2}}{\omega_n n^n} \left(\left\| \frac{\mathbf{b}}{D^*} \right\|^n_{L^n(\Gamma^+ \cap \Omega^+)} + \mu^{-n} \left\| \frac{f^+}{D^*} \right\|^n_{L^n(\Gamma^+ \cap \Omega^+)} \right) \right\} - 1 \right\}.$$

Falls $f \not\equiv 0$, wählen wir $\mu = \|\frac{f^+}{D^*}\|_{L^n(\Gamma^+ \cap \Omega^+)}$. Falls $f \equiv 0$, wählen wir $\mu > 0$ und lassen $\mu \to 0$.

□