1 Körperaxiome und Anordnungsaxiome

Wir setzen in dieser Vorlesung die reellen Zaheln als gegeben aus. Mit $\mathbb{R}$ bezeichnen wir die Menge aller reellen Zahlen, auf der folgende Strukturen gegeben sind:

> *eine Verknüpfung $+$, die je zwei $a, b \in \mathbb{R}$ ein $a + b \in \mathbb{R}$ zuordnet (*Addition*),*
> *eine Verknüpfung $\cdot$, die je zwei $a, b \in \mathbb{R}$ ein $ab \in \mathbb{R}$ zuordnet (*Multiplikation*),*
> *eine Relation $a > b$, die für $a, b \in \mathbb{R}$ zutrifft oder nicht (*Anordnung*).*

Es sollen dabei folgende drei Gruppen von Axiomen gelten:

> *Die Körperaxiome* (K)
> *Die Anordnungsaxiome* (A1, A2 und A3)
> *Das Vollständigkeitsaxiom* (V).

1.1 Körperaxiome

Wir wollen in der Folge die einzelnen Axiome vorstellen und beginnen mit den Körperaxiomen, die die arithmetischen Eigenschaften von $\mathbb{R}$ regeln, das heißt die Addition und die Multiplikation. Sie lauten wie folgt:

Körperaxiome

	$+$	$\bullet$
Assoziativgesetz:	$(a+b)+c = a+(b+c)$	$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
Kommutativgesetz:	$a+b = b+a$	$a \cdot b = b \cdot a$
Neutrales Element:	*Es gibt Zahlen $0 \in \mathbb{R}$ und $1 \in \mathbb{R}$ mit $1 \neq 0$, so dass für alle $a \in \mathbb{R}$ gilt:*	
	$a + 0 = a$	$a \cdot 1 = a$
Inverses Element:	*Zu jedem $a \in \mathbb{R}$ gibt es Lösungen $x, y \in \mathbb{R}$ der Gleichungen*	
	$a + x = 0$	$a \cdot y = 1$ *falls* $a \neq 0$
Distributivgesetz:	$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c.$	

Definition 1.1 *Eine Menge $\mathbb{K}$ mit Verknüpfungen $+$ und $\cdot$, so dass die obigen Axiome erfüllt sind, heißt* Körper *(englisch:* field*).*

In der Algebra treten viele verschiedene Körper auf, ein extremes Beispiel ist

Beispiel 1.1 $\mathbb{K} = \{0, 1\}$ *mit* $1 + 1 = 0$ *und den sonst üblichen Rechenregeln.*

$$\begin{array}{c|cc} + & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \qquad \textit{und} \qquad \begin{array}{c|cc} \cdot & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}$$

Aus der Körperaxiomen haben wir direkte

Folgerung 1.1 *(1). Die neutralen Elemente sind durch die Axiome eindeutig bestimmt. (2). Die inversen Elemente sind ebenfalls eindeutig bestimmt.*

Beweis: (1). Zum Beispiel wären $0_1 \in \mathbb{R}$ und $0_2 \in \mathbb{R}$ neutrale Elemente für die Addition, so folgt mit dem Kommutativgesetz

$$0_1 = 0_1 + 0_2 = 0_2 + 0_1 = 0_2.$$

Das Argument für die Eindeutigkeit von $1 \in \mathbb{R}$ ist natürlich ganz analog.

(2). Für zwei Lösungen $x_{1,2}$ der Gleichung $a + x = 0$ folgt mit dem Assoziativgesetz und dem Kommutativgesetz

$$x_1 = x_1 + 0 = x_1 + (a + x_2) = (x_1 + a) + x_2 = (a + x_1) + x_2 = 0 + x_2 = x_2.$$

Wieder ist das Argument für die Multiplikation analog. □

Bezeichnung. Wir bezeichnen die Lösung x der Gleichung $a + x = 0$ mit $-a$ sowie die Lösung y der Gleichung $ay = 1$ mit $1/a$ oder a^{-1}, und vereinbaren die Notation

$$a - b = a + (-b) \qquad \frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b} = a \cdot b^{-1}.$$

Aus den Körperaxiomen leiten sich unter anderem folgende Rechengesetze ab.

Satz 1.1 (Rechnen in $\mathbb{R}$) *Für reelle Zahlen a, b gelten folgende Aussagen:*

$$\left\{ \begin{array}{ll} -(-a) = a & -(a+b) = (-a) + (-b), \\ (a^{-1})^{-1} = a & (ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1} \text{ für } b \neq 0, \\ a \cdot 0 = 0 & a(-b) = -(ab), \\ (-a)(-b) = ab & a(b-c) = ab - ac. \end{array} \right. \tag{1.1}$$

$$ab = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 0 \text{ oder } b = 0 \quad (\textit{Nullteilerfreiheit}). \tag{1.2}$$

Beweis: Die erste Zeile von (1.1) folgt mit der Eindeutigkeit der Inversen aus

$$(-a) + a = a + (-a) = 0 \qquad (a+b) + ((-a) + (-b)) = (a + (-a)) + (b + (-b)) = 0 + 0 = 0.$$

Der Beweis der zweiten Zeile ist analog. Nun gilt $a \cdot 0 + a \cdot 0 = a \cdot (0 + 0) = a \cdot 0$. Nach Addition von $-a \cdot 0$ folgt $a \cdot 0 = 0$. Daraus ergibt sich weiter

$$ab + a(-b) = a(b + (-b)) = a \cdot 0 = 0,$$

also $a(-b) = -ab$, und dann

$$(-a)(-b) = -((-a)b) = -(b(-a)) = -(-ba) = ba = ab.$$

Die letzte Aussage von (1.1) folgt mit

$$a(b - c) = a(b + (-c)) = ab + a(-c) = ab + (-ac) = ab - ac.$$

Ist in (1.2) $a \neq 0$, so folgt schließlich

$$0 = ab \cdot \frac{1}{a} = (a \cdot \frac{1}{a}) \cdot b = 1 \cdot b = b.$$

Damit sind alle Aussagen des Satzes gezeigt. $\square$

Auch die folgenden Regeln der Bruchrechnung lassen sich aus den Körperaxiomen herleiten, dies sei jedoch den Lesern überlassen.

Folgerung 1.2 (Bruchrechnung) *Für $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit $c, d \neq 0$ gilt:*

(1) $\dfrac{a}{c} + \dfrac{b}{d} = \dfrac{ad + bc}{cd}$,

(2) $\dfrac{a}{c} \cdot \dfrac{b}{d} = \dfrac{ab}{cd}$,

(3) $\dfrac{a/c}{b/d} = \dfrac{ad}{bc}$, *falls zusätzlich $b \neq 0$.*

Für reelle Zahlen $a_m, \ldots, a_n$ setzen wir

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = a_m + \ldots + a_n \quad (m, n \in \mathbb{Z}).$$

Mit des Kommutativgesetzes und des Assoziativgestzes kann man leicht zeigen, dass es wohldefiniert ist. Der Index k durchläuft dabei die ganzen Zahlen von der unteren Grenze $k = m$ bis zur oberen Grenze $k = n$. Der Laufindex k kann substituiert werden, wobei die Grenzen umzurechnen sind. Zum Beispiel liefert $k = j + 1$

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{j=m-1}^{n-1} a_{j+1} = a_m + \ldots + a_n.$$

Es ist praktisch den Fall zuzulassen, dass die untere Grenze größer als die obere Grenze ist, und in diesem Fall die Summe gleich Null zu setzen. Dass heißt

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = 0 \quad \text{falls } n < m.$$

Das Produktzeichen ist ganz analog erklärt:

$$\prod_{k=m}^{n} a_k = a_m \cdot \ldots \cdot a_n.$$

Das leere Produkt wird gleich Eins gesetzt, d.h.,

$$\prod_{k=m}^{n} a_k = 1 \quad \text{falls } n < m.$$

1.2 Anordnungsaxiome

Als nächstes formulieren wir die Anordnungsaxiome.

(**A1**) Für jedes $a \in \mathbb{R}$ gilt genau eine der drei Aussagen $a > 0$, $a = 0$ oder $-a > 0$.

(**A2**) Aus $a, b > 0$ folgt $a + b > 0$ und $ab > 0$.

(**A3**) Zu jedem $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $1/n < \varepsilon$ (*Archimedisches Axiom*).

Wir diskutieren erste die erste zwei Anordnungsaxiome. Das drittes, das Archimedische Axiom, werden wir erst später benutzen, wenn es für den Grenzwertbegriff gebraucht wird.

Bezeichnung. Statt $-a > 0$ schreiben wir auch $a < 0$, und statt $a - b > 0$ auch $a > b$.

Hier einige Folgerungen aus den Anordnungsaxiomen (A1) und (A2).

Satz 1.2 (Rechnen mit Ungleichungen)

(1) *Für $a, b \in \mathbb{R}$ gilt genau eine der Relationen $a > b$, $a = b$ oder $a < b$.* (Trichotomie)

(2) *Aus $a > b$, $b > c$ folgt $a > c$* (Transitivität).

(3) *Aus $a > b$ folgt*

$$\begin{cases} a + c & > & b + c & \\ ac & > & bc, & \text{wenn } c > 0 \\ ac & < & bc, & \text{wenn } c < 0 \end{cases}$$

(4) *Aus $a > b$ und $c > d$ folgt*

$$\begin{cases} a + c & > & b + d, & \\ ac & > & bd, & \text{falls } b, d > 0 \end{cases}$$

(5) *Für $a \neq 0$ ist $a^2 > 0$. Insbesondere, gilt $1 > 0$.*

(6) *Aus $a > 0$ folgt $1/a > 0$.*

(7) *Aus $a > b$, $b > 0$ folgt $1/a < 1/b$.*

Beweis: (1) folgt direkt aus (A1) und der Definition von $a > b$. Für (2) rechnen wir

$$a - c = (a - b) + (b - c) > 0 \quad \text{nach (A2).}$$

Ähnlich ergeben sich (3) und (4):

$$\begin{aligned} (a + c) - (b + c) &= a - b > 0, && \\ ac - bc &= (a - b)c > 0 && \text{im Fall } c > 0 \text{ nach (A2),} \\ bc - ac &= (a - b)(-c) > 0 && \text{im Fall } c < 0 \text{ nach (A2),} \\ (a + c) - (b + d) &= (a - b) + (c - d) > 0 && \text{nach (A2),} \\ ac - bd &= ac - bc + bc - bd && \\ &= (a - b)c + b(c - d) > 0 && \text{nach (2) und (A2).} \end{aligned}$$

Die Positivität von Quadraten folgt aus der Fallunterscheidung

$$a^2 = \begin{cases} a \cdot a > 0 & \text{im Fall } a > 0, \\ (-a) \cdot (-a) > 0 & \text{im Fall } -a > 0. \end{cases}$$

Dabei haben wir die Regel $(-a)(-b) = ab$ aus (1.1) benutzt. Nach (A1) ist $a^2 > 0$ für $a \neq 0$ bewiesen. Aussage (6) ergibt sich nun mit

$$\frac{1}{a} = \left(\frac{1}{a}\right)^2 \cdot a > 0 \quad \text{nach (5) und (A2).}$$

Zu guter Letzt haben wir für (7)

$$\frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{1}{ab}(a-b) > 0 \quad \text{mit (6) und (A2).}$$

□

Definition 1.2 (Betrag einer reellen Zahl) *Der Betrag von $a \in \mathbb{R}$ ist*

$$|a| = \begin{cases} a & \textit{falls } a \geq 0 \\ -a & \textit{falls } a < 0. \end{cases} \tag{1.3}$$

Ein anschauliches Modell der reellen Zahlen ist die Zahlengerade. Ist $a < b$, so liegt b rechts von a im Abstand $|a-b|$. Insbesondere ist $|a|$ der Abstand zum Nullpunkt.

Satz 1.3 (Rechnen mit Beträgen) *Für $a, b \in \mathbb{R}$ gelten folgende Aussagen:*

(1) $|-a| = |a|$ *und* $a \leq |a|$.

(2) $|a| \geq 0$*; aus Gleichheit folgt* $a = 0$.

(3) $|ab| = |a| \cdot |b|$.

(4) $|a+b| \leq |a| + |b|$. *(Dreiecke-Ungleichung)*

(5) $|a-b| \geq ||a| - |b||$.

Beweis: Aus Definition 1.2 folgt

$$|-a| = \begin{cases} -a & \text{falls } -a \geq 0 \\ -(-a) & \text{falls } -a \leq 0 \end{cases} = \begin{cases} -a & \text{falls } a \leq 0 \\ a & \text{falls } a \geq 0 \end{cases} = |a|.$$

Weiter folgt (2) aus

$$|a| - a = \begin{cases} 0 & \text{falls } a \geq 0, \\ -a-a \geq 0 & \text{falls } a \leq 0. \end{cases}$$

In (3) bleiben die linke und rechte Seite gleich, wenn wir a durch $-a$ ersetzen, dasselbe gilt bezüglich b. Also können wir $a, b \geq 0$ annehmen, und erhalten $|ab| = ab = |a| \cdot |b|$ wie verlangt. Für (4) schätzen wir mit (1) wie folgt ab:

$$|a+b| = \pm(a+b) = \pm a + (\pm b) \leq |a| + |b|.$$

Schließlich gilt $|a| = |a-b+b| \leq |a-b| + |b|$ nach (4), also $|a-b| \geq |a| - |b|$. Durch Vertauschen von a und b folgt (5). □

Wie wir später sehen werden, spielen Ungleichungen in der Analysis eine große Rolle.