1 Körperaxiome und Anordnungsaxiome

Wir setzen in dieser Vorlesung die reellen Zaheln als gegeben aus. Mit $\mathbb{R}$ bezeichnen wir die Menge aller reellen Zahlen, auf der folgende Strukturen gegeben sind:

eine Verknüpfung $+$, *die je zwei* $a, b \in \mathbb{R}$ *ein* $a + b \in \mathbb{R}$ *zuordnet (*Addition*),*
eine Verknüpfung $\cdot$, *die je zwei* $a, b \in \mathbb{R}$ *ein* $ab \in \mathbb{R}$ *zuordnet (*Multiplikation*),*
eine Relation $a > b$, *die für* $a, b \in \mathbb{R}$ *zutrifft oder nicht (*Anordnung*).*

Es sollen dabei folgende drei Gruppen von Axiomen gelten:

Die Körperaxiome (K)
Die Anordnungsaxiome (A1, A2 und A3)
Das Vollständigkeitsaxiom (V).

1.1 Körperaxiome

Wir wollen in der Folge die einzelnen Axiome vorstellen und beginnen mit den Körperaxiomen, die die arithmetischen Eigenschaften von $\mathbb{R}$ regeln, das heißt die Addition und die Multiplikation. Sie lauten wie folgt:

Körperaxiome

	$+$	$\bullet$
Assoziativgesetz:	$(a+b)+c = a+(b+c)$	$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
Kommutativgesetz:	$a+b = b+a$	$a \cdot b = b \cdot a$
Neutrales Element:	*Es gibt Zahlen* $0 \in \mathbb{R}$ *und* $1 \in \mathbb{R}$ *mit* $1 \neq 0$, *so dass für alle* $a \in \mathbb{R}$ *gilt:*	
	$a + 0 = a$	$a \cdot 1 = a$
Inverses Element:	*Zu jedem* $a \in \mathbb{R}$ *gibt es Lösungen* $x, y \in \mathbb{R}$ *der Gleichungen*	
	$a + x = 0$	$a \cdot y = 1$ *falls* $a \neq 0$
Distributivgesetz:	$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c.$	

Definition 1.1 *Eine Menge* $\mathbb{K}$ *mit Verknüpfungen* $+$ *und* $\cdot$, *so dass die obigen Axiome erfüllt sind, heißt* Körper *(englisch:* field*).*

In der Algebra treten viele verschiedene Körper auf, ein extremes Beispiel ist

Beispiel 1.1 $\mathbb{K} = \{0, 1\}$ *mit* $1 + 1 = 0$ *und den sonst üblichen Rechenregeln.*

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

und

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

Aus der Körperaxiomen haben wir direkte

Folgerung 1.1 *(1). Die neutralen Elemente sind durch die Axiome eindeutig bestimmt. (2). Die inversen Elemente sind ebenfalls eindeutig bestimmt.*

Beweis: (1). Zum Beispiel wären $0_1 \in \mathbb{R}$ und $0_2 \in \mathbb{R}$ neutrale Elemente für die Addition, so folgt mit dem Kommutativgesetz

$$0_1 = 0_1 + 0_2 = 0_2 + 0_1 = 0_2.$$

Das Argument für die Eindeutigkeit von $1 \in \mathbb{R}$ ist natürlich ganz analog.

(2). Für zwei Lösungen $x_{1,2}$ der Gleichung $a + x = 0$ folgt mit dem Assoziativgesetz und dem Kommutativgesetz

$$x_1 = x_1 + 0 = x_1 + (a + x_2) = (x_1 + a) + x_2 = (a + x_1) + x_2 = 0 + x_2 = x_2.$$

Wieder ist das Argument für die Multiplikation analog. □

Bezeichnung. Wir bezeichnen die Lösung x der Gleichung $a + x = 0$ mit $-a$ sowie die Lösung y der Gleichung $ay = 1$ mit $1/a$ oder a^{-1}, und vereinbaren die Notation

$$a - b = a + (-b) \qquad \frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b} = a \cdot b^{-1}.$$

Aus den Körperaxiomen leiten sich unter anderem folgende Rechengesetze ab.

Satz 1.1 (Rechnen in $\mathbb{R}$) *Für reelle Zahlen a, b gelten folgende Aussagen:*

$$\left\{ \begin{array}{ll} -(-a) = a & -(a+b) = (-a) + (-b), \\ (a^{-1})^{-1} = a & (ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1} \text{ für } b \neq 0, \\ a \cdot 0 = 0 & a(-b) = -(ab), \\ (-a)(-b) = ab & a(b-c) = ab - ac. \end{array} \right. \tag{1.1}$$

$$ab = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 0 \text{ oder } b = 0 \quad (\textit{Nullteilerfreiheit}). \tag{1.2}$$

Beweis: Die erste Zeile von (1.1) folgt mit der Eindeutigkeit der Inversen aus

$$(-a) + a = a + (-a) = 0 \qquad (a+b) + ((-a) + (-b)) = (a + (-a)) + (b + (-b)) = 0 + 0 = 0.$$

Der Beweis der zweiten Zeile ist analog. Nun gilt $a \cdot 0 + a \cdot 0 = a \cdot (0 + 0) = a \cdot 0$. Nach Addition von $-a \cdot 0$ folgt $a \cdot 0 = 0$. Daraus ergibt sich weiter

$$ab + a(-b) = a(b + (-b)) = a \cdot 0 = 0,$$

also $a(-b) = -ab$, und dann

$$(-a)(-b) = -((-a)b) = -(b(-a)) = -(-ba) = ba = ab.$$

Die letzte Aussage von (1.1) folgt mit

$$a(b - c) = a(b + (-c)) = ab + a(-c) = ab + (-ac) = ab - ac.$$

Ist in (1.2) $a \neq 0$, so folgt schließlich

$$0 = ab \cdot \frac{1}{a} = (a \cdot \frac{1}{a}) \cdot b = 1 \cdot b = b.$$

Damit sind alle Aussagen des Satzes gezeigt. $\square$

Auch die folgenden Regeln der Bruchrechnung lassen sich aus den Körperaxiomen herleiten, dies sei jedoch den Lesern überlassen.

Folgerung 1.2 (Bruchrechnung) *Für $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit $c, d \neq 0$ gilt:*

(1) $\dfrac{a}{c} + \dfrac{b}{d} = \dfrac{ad + bc}{cd}$,

(2) $\dfrac{a}{c} \cdot \dfrac{b}{d} = \dfrac{ab}{cd}$,

(3) $\dfrac{a/c}{b/d} = \dfrac{ad}{bc}$, *falls zusätzlich $b \neq 0$.*

Für reelle Zahlen $a_m, \ldots, a_n$ setzen wir

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = a_m + \ldots + a_n \quad (m, n \in \mathbb{Z}).$$

Mit des Kommutativgesetzes und des Assoziativgestzes kann man leicht zeigen, dass es wohldefiniert ist. Der Index k durchläuft dabei die ganzen Zahlen von der unteren Grenze $k = m$ bis zur oberen Grenze $k = n$. Der Laufindex k kann substituiert werden, wobei die Grenzen umzurechnen sind. Zum Beispiel liefert $k = j + 1$

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{j=m-1}^{n-1} a_{j+1} = a_m + \ldots + a_n.$$

Es ist praktisch den Fall zuzulassen, dass die untere Grenze größer als die obere Grenze ist, und in diesem Fall die Summe gleich Null zu setzen. Dass heißt

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = 0 \qquad \text{falls } n < m.$$

Das Produktzeichen ist ganz analog erklärt:

$$\prod_{k=m}^{n} a_k = a_m \cdot \ldots \cdot a_n.$$

Das leere Produkt wird gleich Eins gesetzt, d.h.,

$$\prod_{k=m}^{n} a_k = 1 \qquad \text{falls } n < m.$$

1.2 Anordnungsaxiome

Als nächstes formulieren wir die Anordnungsaxiome.

(**A1**) Für jedes $a \in \mathbb{R}$ gilt genau eine der drei Aussagen $a > 0$, $a = 0$ oder $-a > 0$.

(**A2**) Aus $a, b > 0$ folgt $a + b > 0$ und $ab > 0$.

(**A3**) Zu jedem $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $1/n < \varepsilon$ (*Archimedisches Axiom*).

Wir diskutieren erste die erste zwei Anordnungsaxiome. Das drittes, das Archimedische Axiom, werden wir erst später benutzen, wenn es für den Grenzwertbegriff gebraucht wird.

Bezeichnung. Statt $-a > 0$ schreiben wir auch $a < 0$, und statt $a - b > 0$ auch $a > b$.

Hier einige Folgerungen aus den Anordnungsaxiomen (A1) und (A2).

Satz 1.2 (Rechnen mit Ungleichungen)

(1) *Für $a, b \in \mathbb{R}$ gilt genau eine der Relationen $a > b$, $a = b$ oder $a < b$.* (Trichotomie)

(2) *Aus $a > b$, $b > c$ folgt $a > c$* (Transitivität).

(3) *Aus $a > b$ folgt*

$$\begin{cases} a + c > b + c & \\ ac > bc, & \text{wenn } c > 0 \\ ac < bc, & \text{wenn } c < 0 \end{cases}$$

(4) *Aus $a > b$ und $c > d$ folgt*

$$\begin{cases} a + c > b + d, & \\ ac > bd, & \text{falls } b, d > 0 \end{cases}$$

(5) *Für $a \neq 0$ ist $a^2 > 0$. Insbesondere, gilt $1 > 0$.*

(6) *Aus $a > 0$ folgt $1/a > 0$.*

(7) *Aus $a > b$, $b > 0$ folgt $1/a < 1/b$.*

Beweis: (1) folgt direkt aus (A1) und der Definition von $a > b$. Für (2) rechnen wir

$$a - c = (a - b) + (b - c) > 0 \quad \text{nach (A2).}$$

Ähnlich ergeben sich (3) und (4):

$$\begin{aligned} (a + c) - (b + c) &= a - b > 0, && \\ ac - bc &= (a - b)c > 0 && \text{im Fall } c > 0 \text{ nach (A2),} \\ bc - ac &= (a - b)(-c) > 0 && \text{im Fall } c < 0 \text{ nach (A2),} \\ (a + c) - (b + d) &= (a - b) + (c - d) > 0 && \text{nach (A2),} \\ ac - bd &= ac - bc + bc - bd && \\ &= (a - b)c + b(c - d) > 0 && \text{nach (2) und (A2).} \end{aligned}$$

Die Positivität von Quadraten folgt aus der Fallunterscheidung

$$a^2 = \begin{cases} a \cdot a > 0 & \text{im Fall } a > 0, \\ (-a) \cdot (-a) > 0 & \text{im Fall } -a > 0. \end{cases}$$

Dabei haben wir die Regel $(-a)(-b) = ab$ aus (1.1) benutzt. Nach (A1) ist $a^2 > 0$ für $a \neq 0$ bewiesen. Aussage (6) ergibt sich nun mit

$$\frac{1}{a} = \left(\frac{1}{a}\right)^2 \cdot a > 0 \quad \text{nach (5) und (A2).}$$

Zu guter Letzt haben wir für (7)

$$\frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{1}{ab}(a-b) > 0 \quad \text{mit (6) und (A2).}$$

□

Definition 1.2 (Betrag einer reellen Zahl) *Der Betrag von $a \in \mathbb{R}$ ist*

$$|a| = \begin{cases} a & \text{falls } a \geq 0 \\ -a & \text{falls } a < 0. \end{cases} \tag{1.3}$$

Ein anschauliches Modell der reellen Zahlen ist die Zahlengerade. Ist $a < b$, so liegt b rechts von a im Abstand $|a-b|$. Insbesondere ist $|a|$ der Abstand zum Nullpunkt.

Satz 1.3 (Rechnen mit Beträgen) *Für $a, b \in \mathbb{R}$ gelten folgende Aussagen:*

(1) $|-a| = |a|$ *und* $a \leq |a|$.

(2) $|a| \geq 0$*; aus Gleichheit folgt* $a = 0$.

(3) $|ab| = |a| \cdot |b|$.

(4) $|a+b| \leq |a| + |b|$. *(Dreiecke-Ungleichung)*

(5) $|a-b| \geq ||a| - |b||$.

Beweis: Aus Definition 1.2 folgt

$$|-a| = \begin{cases} -a & \text{falls } -a \geq 0 \\ -(-a) & \text{falls } -a \leq 0 \end{cases} = \begin{cases} -a & \text{falls } a \leq 0 \\ a & \text{falls } a \geq 0 \end{cases} = |a|.$$

Weiter folgt (2) aus

$$|a| - a = \begin{cases} 0 & \text{falls } a \geq 0, \\ -a-a \geq 0 & \text{falls } a \leq 0. \end{cases}$$

In (3) bleiben die linke und rechte Seite gleich, wenn wir a durch $-a$ ersetzen, dasselbe gilt bezüglich b. Also können wir $a, b \geq 0$ annehmen, und erhalten $|ab| = ab = |a| \cdot |b|$ wie verlangt. Für (4) schätzen wir mit (1) wie folgt ab:

$$|a+b| = \pm(a+b) = \pm a + (\pm b) \leq |a| + |b|.$$

Schließlich gilt $|a| = |a-b+b| \leq |a-b| + |b|$ nach (4), also $|a-b| \geq |a| - |b|$. Durch Vertauschen von a und b folgt (5). □

Wie wir später sehen werden, spielen Ungleichungen in der Analysis eine große Rolle.