## 2 Vollständige Induktion

Wir unterbrechen jetzt die Diskussion der Axiome der reellen Zahlen, um das Beweisverfahren der vollständigen Induktion kennenzulernen. Wir setzen voraus, dass die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ als Folge $1$, $1+1=2$, $2+1=3$, $\ldots$ gegeben sind. Ausgehend von $1 \in \mathbb{N}$ wird also jede natürliche Zahl erreicht, indem die 1 endlich oft addiert wird. Darauf beruht das

**Induktionsprinzip:** Sei $M \subset \mathbb{N}$ eine Menge mit den beiden Eigenschaften

(1) $1 \in M$,

(2) $n \in M \quad \Rightarrow \quad n+1 \in M$.

Dann gilt schon $M = \mathbb{N}$.

Die Beschreibung der natürlichen Zahlen als Folge $1, 2, 3, \ldots$ ist keine strenge Definition, da die Pünktchen nicht präzisiert werden. Demzufolge können wir auch das Induktionsprinzip nicht rigoros begründen, sondern nehmen es schlicht als gegeben hin. Auf der Basis der Axiome (K), (A1) und (A2) kann aber eine strenge Definition der natürlichen Zahlen als Teilmenge der reellen Zahlen gegeben werden, wobei das Induktionsprinzip dann als Satz gefolgert wird. Dies wird zum Beispiel in den Büchern von Barner & Flohr sowie Hildebrandt ausgeführt. Das Beweisverfahren der vollständigen Induktion ergibt sich direkt aus dem Induktionsprinzip.

**Satz 2.1 (Beweisverfahren der vollständigen Induktion)** *Gegeben sei eine Folge von Aussagen $A(n)$ für $n \in \mathbb{N}$. Es möge gelten:*

(1) *$A(1)$ ist wahr. (Induktionsanfang)*

(2) *$A(n)$ ist wahr $\quad \Rightarrow \quad$ $A(n+1)$ ist wahr. (Induktionsschluß)*

*Dann sind alle Aussagen $A(n)$ wahr.*

Beweis: Wir betrachten die Menge $M = \{n \in \mathbb{N} : A(n) \text{ ist wahr}\}$. Nach Voraussetzung gilt $1 \in M$, und mit $n \in M$ ist auch $n+1 \in M$. Das Induktionsprinzip ergibt $M = \mathbb{N}$, das heißt alle Aussagen $A(n)$ sind wahr. $\square$

Ein Induktionsbeweis funktioniert immer in zwei Schritten:

- Induktionsanfang ($n = 1$): Beweis der Behauptung für $n = 1$.
- Induktionsschluß ($n \Rightarrow n+1$): Beweis, dass aus der Wahrheit der Behauptung für $A(n)$ (*Induktionsannahme*) die Wahrheit der Behauptung für $A(n+1)$ folgt.

**Bemerkung**. Statt bei $n = 1$ kann die Induktion auch bei einer anderen Zahl starten. Zum Beispiel ist zu jeder ganzen Zahl $n \geq n_0$ eine Aussage $A(n)$ gegeben. Vollstandige Induktion kann sinngemäß auch in dieser Situation angewendet werden. Als Induktionsanfang hat man $A(n_0)$ zu beweisen und der Induktionsschluß $A(n) \to A(n+1)$ ist für die $n \geq n_0$ zu erbringen.

**Beispiel 2.1 (arithmetische Summe)** Wir zeigen die Summenformel

$$A(n): \quad 1+2+\cdots+n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

BEWEIS: *Induktionsanfang.* Für $n = 1$ ist sowohl die linke als auch die rechte Seite gleich Eins, also gilt der Induktionsanfang.
*Induktionsschluß* $(n \Rightarrow n+1)$. Jetzt berechnen wir unter Verwendung von $A(n)$

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right) + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}.$$

Damit ist $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ bewiesen. □
Nach dem neunjährigen Gauß kommen wir natürlich auch ohne Induktion zum Ziel:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n+1} k + \sum_{k=1}^{n}(n-k+1)\right) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(k+n-k+1) = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Der Vorteil dieses Arguments ist, dass wir die Formel nicht vorher raten müssen. □

**Beispiel 2.2 (geometrische Summe)** Sei $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 1$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$1 + x + \ldots + x^n = \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{k+1}}{1-x}.$$

BEWEIS: *Induktionsanfang* $(n = 0)$. Wir zeigen das wieder durch vollständige Induktion, wobei wir bei $n = 0$ beginnen:

$$\sum_{k=0}^{0} x^k = x^0 = 1 = \frac{1-x^{0+1}}{1-x}.$$

*Induktionsschluß* $(n \Rightarrow n+1)$. Jetzt gelte die Formel für ein $n \in \mathbb{N}$. Dann folgt

$$\sum_{k=0}^{n+1} x^k = \left(\sum_{k=0}^{n} x^k\right) + x^{n+1} \stackrel{A(n)}{=} \frac{1-x^{n+1}}{1-x} + x^{n+1} = \frac{1-x^{(n+1)+1}}{1-x},$$

womit die Behauptung $A(n+1)$ gezeigt ist. □
Auch hier haben wir ein alternatives Argument, nämlich den sogenannten Teleskopsummentrick:

$$1 - x^{n+1} = 1 - x + x - \ldots - x^n + x^n - x^{n+1} = \sum_{k=0}^{n}(x^k - x^{k+1}) = (1-x)\sum_{k=0}^{n} x^k.$$

□

Ebenfalls mit dem Beweisverfahren der vollständigen Induktion zeigen wir folgende nützliche Ungleichung.

**Satz 2.2 (Bernoullische Ungleichung)** *Für $x \in \mathbb{R}$, $x \geq -1$, und $n \in \mathbb{N}_0$ gilt*

$$(1+x)^n \geq 1 + nx.$$

Beweis: Wir führen Induktion über $n \in \mathbb{N}_0$. (Die Induktion fäng von $n = 0$ an.) Für $n = 0$ gilt nach Definition $(1+x)^0 = 1 = 1 + 0 \cdot x$. Wegen $1 + x \geq 0$ folgt weiter

$$\begin{aligned}
(1+x)^{n+1} &= (1+x) \cdot (1+x)^n \\
&\geq (1+x) \cdot (1+nx) \quad \text{(nach Induktionsannahme)} \\
&= 1 + (n+1)x + nx^2 \\
&\geq 1 + (n+1)x.
\end{aligned}$$

□

Wir wollen als nächstes die Elemente gewisser Mengen zählen.

**Satz 2.3 (Schubfachprinzip)** *Ist $f : \{1, \ldots, m\} \to \{1, \ldots, n\}$ injektiv, so folgt $m \leq n$.*

Beweis: Wir fassen die Behauptung als Aussage $A(n)$ auf, die jeweils für alle $m \in \mathbb{N}$ zu zeigen ist, und führen einen Induktionsbeweis.
(*IA*) Für $n = 1$ haben wir eine injektive Abbildung $f : \{1, \ldots, m\} \to \{1\}$ und es folgt sofort $m = 1$, also der Induktionsanfang.
(*IS*) Sei nun eine injektive Abbildung $f : \{1, \ldots, m\} \to \{1, \ldots, n+1\}$ gegeben. Zu zeigen ist $m \leq n + 1$, was für $m = 1$ offensichtlich ist. Für $m \geq 2$ konstruieren wir eine injektive Abbildung

$$\tilde{f} : \{1, \ldots, m-1\} \to \{1, \ldots, n\},\ k \mapsto \tilde{f}(k).$$

Mit der Induktionsannahme folgt dann $m - 1 \leq n$ beziehungsweise $m \leq n + 1$ wie gewünscht.
Die Funkition $\tilde{f}$ ist wie folgt konstruiert: Im Fall $f(k) \in \{1, \ldots, n\}$ für alle $k = 1, \ldots, m-1$ können wir einfach $\tilde{f}(k) = f(k)$ setzen. Andernfalls gibt es genau ein $i \in \{1, \ldots, m-1\}$ mit $f(i) = n + 1$. Da $f$ nach Voraussetzung injektiv ist, folgt $f(m) \neq n + 1$, das heißt $f(m) \in \{1, \ldots, n\}$, und wir können setzen

$$\tilde{f}(k) = \begin{cases} f(k) & \text{für } k = 1, \ldots, m-1,\ k \neq i, \\ f(m) & \text{für } k = i. \end{cases}$$

Es ist leicht zu sehen (*Übung*), dass in jedem der Fälle $\tilde{f}$ injektiv ist. □

**Definition 2.1 (Zahl der Elemente)** *Eine nichtleere Menge $M$ heißt endlich, wenn für ein $n \in \mathbb{N}$ eine Bijektion $f : \{1, \ldots, n\} \to M$ existiert; andernfalls heißt sie unendlich. Im endlichen Fall heißt $n$ Anzahl der Elemente von $M$ (Symbol: $\#M = n$). Die leere Menge wird ebenfalls als endlich bezeichnet mit $\#\emptyset = 0$.*

**Lemma 2.1** *Die Anzahl einer endlichen Menge ist* wohldefiniert

Beweis: Wir mussen zeigen dass die Zahl $n$ mit einer Bijektion $f : \{1, \ldots, n\} \to M$ eindeutig bestimmt ist. Denn ist $\tilde{f} : \{1, \ldots, m\} \to M$ ebenfalls bijektiv, so haben wir die bijektiven, insbesondere injektiven, Abbildungen

$$\tilde{f}^{-1} \circ f : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, m\} \quad \text{sowie} \quad f^{-1} \circ \tilde{f} : \{1, \ldots, m\} \to \{1, \ldots, n\}.$$

Aus dem Schubfachprinzip, Satz 2.3, folgt dann $n \leq m$ und $m \leq n$, also $m = n$. $\square$

Der Satz garantiert also, dass die scheinbare Uneindeutigkeit in der Definition der Anzahl nicht vorhanden ist. Die Mathematiker haben dafür die schöne Formulierung, die Anzahl sei *wohldefiniert*.

Das Produkt $n! = \prod_{k=1}^{n} k = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$ wird als *n-Fakultät* bezeichnet; dabei ist per Definition $0! = 1$ (in Konsistenz mit unserer Vereinbarung zum leeren Produkt). Der folgende Satz beantwortet die Frage nach der Anzahl der möglichen Anordnungen (oder Umordnungen oder Permutationen) von $n$ Dingen.

**Satz 2.4 (Zahl der Permutationen)** *Für $n \in \mathbb{N}$ sei $S_n$ die Menge der bijektiven Abbildungen $\sigma : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$. Dann gilt $\# S_n = n!$.*

Beweis: Wir zeigen die Behauptung durch Induktion, wobei der Induktionsanfang $n = 1$ offensichtlich ist. Es ist praktisch, jedes $\sigma \in S_n$ mit dem $n$-Tupel $(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ zu identifizieren, wobei $\sigma_i = \sigma(i)$. Die Menge $S_{n+1}$ ist disjunkte Vereinigung der Teilmengen

$$S_{n+1,k} = \{\tau \in S_{n+1} : \tau_k = n+1\} \quad \text{für } k = 1, \ldots, n+1.$$

Beispielsweise ist in aufzählender Form

$$S_{4,2} = \{(1,4,2,3), (2,4,3,1), (3,4,1,2), (1,4,2,3), (2,4,1,3), (3,4,1,2)\}.$$

Jedem $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \in S_n$ können wir die Permutation $(\sigma_1, \ldots, \sigma_{k-1}, n+1, \sigma_k, \ldots, \sigma_n)$ in $S_{n+1,k}$ zuordnen, und diese Abbildung ist bijektiv (*nachprüfen!*). Also folgt aus der Induktionsannahme $\# S_{n+1,k} = \# S_n = n!$ und

$$\# S_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \# S_{n+1,k} = (n+1) \cdot n! = (n+1)!.$$

$\square$

**Definition 2.2 (Binomialkoeffizienten)** *Für $\alpha \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{N}$ setzen wir*

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha \cdot (\alpha - 1) \cdot \ldots \cdot (\alpha - k + 1)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k}, \qquad \textit{sowie} \qquad \binom{\alpha}{0} = 1.$$

**Lemma 2.2 (Additionstheorem für Binomialkoeffizienten)** *Für $\alpha \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{N}$ erfüllen die Binomialkoeffizienten die Formel*

$$\binom{\alpha+1}{k} = \binom{\alpha}{k} + \binom{\alpha}{k-1}.$$

Beweis: Für $k = 1$ ist leicht zu sehen, dass die Formel richtig ist. Für $k \geq 2$ berechnen wir

$$\begin{aligned}
\binom{\alpha}{k} + \binom{\alpha}{k-1} &= \frac{\alpha \cdot (\alpha-1) \cdot \ldots \cdot (\alpha-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k} + \frac{\alpha \cdot (\alpha-1) \cdot \ldots \cdot (\alpha-k+2)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (k-1)} \\
&= \frac{\alpha \cdot (\alpha-1) \cdot \ldots \cdot (\alpha-k+2) \cdot (\alpha-k+1+k)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k} \\
&= \frac{(\alpha+1) \cdot \alpha \cdot \ldots \cdot ((\alpha+1)-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k} \\
&= \binom{\alpha+1}{k}.
\end{aligned}$$

□

Im Fall $\alpha = n \in \mathbb{N}_0$ erlaubt Lemma 2.2 die rekursive Berechnung der Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ nach dem Dreiecksschema von Blaise Pascal (1623-1662). (Das Pascalsche Dreieck nennt man auch Dreiecke von Yang Hui, vor 1303)

| | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| n=0 | | | | | | | 1 | | | | | | |
| n=1 | | | | | | 1 | | 1 | | | | | |
| n=2 | | | | | 1 | | 2 | | 1 | | | | |
| n=3 | | | | 1 | | 3 | | 3 | | 1 | | | |
| n=4 | | | 1 | | 4 | | 6 | | 4 | | 1 | | |
| n=5 | | 1 | | 5 | | 10 | | 10 | | 5 | | 1 | |
| n=6 | 1 | | 6 | | 15 | | 20 | | 15 | | 6 | | 1 |

Ebenfalls für $\alpha = n \in \mathbb{N}_0$ folgt durch Erweitern der Binomialkoeffizienten mit $(n-k)!$ die alternative Darstellung

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \text{ für } n \in \mathbb{N}_0,\ k \in \{0, 1, \ldots, n\}, \tag{2.4}$$

und daraus weiter die am Diagramm ersichtliche Symmetrieeigenschaft

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \text{ für } n \in \mathbb{N}_0,\ k \in \{0, 1, \ldots, n\}. \tag{2.5}$$

**Satz 2.5 (Zahl der Kombinationen)** *Sei $n \in \mathbb{N}_0$ und $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Dann ist die Anzahl der $k$-elementigen Teilmengen von $\{1, \ldots, n\}$ gleich $\binom{n}{k}$.*

Beweis: Die Behauptung gilt für $k = 0$ und beliebiges $n$, denn die leere Menge ist die einzige null-elementige Teilmenge von $\{1, \ldots, n\}$, und nach Definition ist $\binom{n}{0} = 1$. Insbesondere gilt die Behauptung für $n = 0$. Wir führen nun Induktion über $n$, wobei wir die Behauptung jeweils für alle $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ zeigen. Im Induktionsschluss müssen wir die Anzahl der $k$-elementigen Teilmengen von $\{1, \ldots, n+1\}$ bestimmen, wobei wir $k \geq 1$ annehmen können. Diese Teilmengen zerfallen in zwei disjunkte Klassen:

**Klasse 1:** Die Menge enthält die Nummer $n+1$ nicht.

**Klasse 2:** Die Menge enthält die Nummer $n+1$.

Klasse 1 besteht genau aus den $k$-elementigen Teilmengen von $\{1,\ldots,n\}$, Klasse 2 ergibt sich durch Hinzufügen des Elements $n+1$ zu jeder der $(k-1)$-elementigen Teilmengen von $\{1,\ldots,n\}$. Insgesamt ist die Zahl der $k$-elementigen Teilmengen von $\{1,\ldots,n+1\}$ nach Induktionsannahme also gleich

$$\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}=\binom{n+1}{k}$$

nach Lemma 2.2, womit der Satz bewiesen ist. □

**Satz 2.6 (Binomische Formel)** *Für $a,b\in\mathbb{R}$ und $n\in\mathbb{N}$ gilt*

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}. \tag{2.6}$$

Beweis: Ausmultiplizieren des $n$-fachen Produkts $(a+b)^n=(a+b)\cdot(a+b)\cdot\ldots\cdot(a+b)$ mit dem Distributivgesetz und Ordnen nach dem Kommutativgesetz liefert Terme der Form $a^k b^{n-k}$ für $k\in\{0,1,\ldots,n\}$. Die Häufigkeit eines solchen Terms ist gleich der Anzahl der Möglichkeiten, aus den $n$ Klammern $k$ Klammern auszusuchen, in denen $a$ als Faktor genommen wird; in den restlichen Klammern muss dann der Faktor $b$ gewählt werden. Nach Satz 2.5 kommt $a^k b^{n-k}$ also genau $\binom{n}{k}$ mal vor. □

Alternativ folgt der Satz auch durch vollständige Induktion über $n$, und zwar gilt der Induktionsanfang $n=1$ wegen

$$n=1:\quad (a+b)^1=\binom{1}{0}a^0\,b^1+\binom{1}{1}a^1b^0.$$

Der Induktionsschluss ergibt sich wie folgt:

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k} \qquad \text{(nach Induktionsannahme)}\\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{k+1}b^{n-k}+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k\,b^{n-k+1}\\
&= a^{n+1}+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}a^k\,b^{n-(k-1)}+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n+1-k}+b^{n+1}\\
&= a^{n+1}+\sum_{k=1}^{n}\left[\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}\right]a^k b^{n+1-k}+b^{n+1}\\
&= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}a^k b^{n+1-k} \qquad \text{nach Lemma 2.2.}
\end{aligned}$$

Die folgende Umformulierung des Induktionsprinzips erscheint absolut selbstverständlich; wir erinnern aber daran, dass wir keine strenge Definition der natürlichen Zahlen gegeben haben.

**Satz 2.7 (Prinzip der kleinsten natürlichen Zahl)** *Jede nichtleere Menge $M \subset \mathbb{N}$ besitzt ein kleinstes Element.*

BEWEIS: Wir beweissen dem Satz durch eine Widerspruch-Argumente. Angenommen, es gibt kein kleinstes Element in $M \subset \mathbb{N}$. Wie zeigen dann durch Induktion $\{1, \ldots, n\} \cap M = \emptyset$. Für $n = 1$ ist das richtig, denn sonst wäre $1 \in M$ das kleinste Element. Ist die Behauptung für $n \in \mathbb{N}$ gezeigt, so gilt sie auch für $n + 1$, denn sonst wäre $n + 1$ kleinstes Element in $M$. Also folgt $\{1, \ldots, n\} \cap M = \emptyset$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Aber dann ist $M$ die leere Menge im Widerspruch zur Voraussetzung. □

Als Anwendung zeigen wir nun, dass die rationalen Zahlen auf der Zahlengeraden dicht verteilt sind. Dafür brauchen wir nun das Archimedisches Axiom (A3). Wir holen das hier wieder.

**(A3)** Zu jedem $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $1/n < \varepsilon$ (*Archimedisches Axiom*).

Es gibt dann auch zu jedem $K \in \mathbb{R}$, $K > 0$, ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n > K$, wie sich mit der Wahl $\varepsilon = 1/K > 0$ in (A3) sofort ergibt.

**Satz 2.8 ($\mathbb{Q}$ ist dicht in $\mathbb{R}$)** *Zu je zwei reellen Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ gibt es eine rationale Zahl $q \in \mathbb{Q}$ mit $a < q < b$.*

BEWEIS: Wir können $b > 0$ annehmen, denn sonst gehen wir zu $a' = -b$, $b' = -a$ über. Ausserdem ist o.B.d.A. $a \geq 0$, da wir andernfalls einfach $q = 0$ setzen. Nach A3 existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $1/n < b - a$. Betrachte nun die Menge

$$M = \{k \in \mathbb{N} : k/n > a\} \subset \mathbb{N}.$$

$M$ ist nichtleer: falls $a = 0$ so ist zum Beispiel $1 \in M$, andernfalls gibt es nach A3 ein $k \in \mathbb{N}$ mit $1/k < 1/na$ bzw. $k/n > a$. Sei $m \in M$ das kleinste Element nach Satz 1.3. Dann ist einerseits $m/n > a$ und andererseits $(m-1)/n \leq a$, also

$$a < \frac{m}{n} = \frac{m-1}{n} + \frac{1}{n} < a + (b - a) = b.$$

Die Zahl $q = m/n$ leistet somit das Verlangte. □

Ebenso wichtig wie der Beweis durch vollstädige Induktion ist die Konstruktion durch vollständige Induktion, *rekursive Definition* genannt. Es soll jeder natürlichen Zahl $n$ ein Element $f(n)$ einer Menge $X$ zugeordnet werden durch

(I) die Angabe von $f(1)$ und

(II) eine Vorschrift $F$, die für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein Element $f(n + 1)$ aus den Elementen $f(1), f(2), \cdots, f(n)$ zu berechnen gestattet:

$$f(n + 1) = F(f(1), \cdots, f(n)).$$

(Rekursionsvorschrift)

**Beispiel 2.3** *Man erklärt die Potenzen einer Zahl durch*

*(I) $x^1 := x$ und*

*(II) die Rekursionsformel $x^{n+1} := x^n \cdot x$ für jedes $n \in \mathbb{N}$.*