Also gilt $|a_n| \le \max(|a_1|, |a_2|, \dots, |a_{n_0-1}|, |a_{n_0}|+1) = K$. Sei nun $N \in \mathbb{R}$ mit $|a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2}$ für $n, m > N$. Wir wenden den Auswahlsatz von Bolzano-Weierstraß an: es gibt eine Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit $a_{n_k} \to a$ mit $k \to \infty$. Wähle $k_0 \in \mathbb{N}$ mit $|a_{n_{k_0}} - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ und $n_{k_0} > N$. Für $n > N$ folgt

$$|a_n - a| \le \underbrace{|a_n - a_{n_{k_0}}|}_{<\frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|a_{n_{k_0}} - a|}_{<\frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon.$$

Somit konvergiert die ganze Folge gegen a. □

Definition 2.8 *Die Menge $M \subset \mathbb{R}$ heißt*

$$\begin{aligned} \textit{nach oben beschränkt} \quad &\Leftrightarrow \quad \exists\, K \in \mathbb{R} \textit{ mit } x \le K \textit{ für alle } x \in M, \\ \textit{nach unten beschränkt} \quad &\Leftrightarrow \quad \exists\, K \in \mathbb{R} \textit{ mit } x \ge K \textit{ für alle } x \in M. \end{aligned}$$

Die Zahl K heißt dann obere bzw. untere Schranke. Weiter heißt M

$$\textit{beschränkt} \quad \Leftrightarrow \exists\, K \ge 0 \textit{ mit } |x| \le K \textit{ für alle } x \in M.$$

Eine Menge ist genau dann beschränkt, wenn sie nach oben und unten beschränkt ist. Denn aus $|x| \le K$ folgt $-K \le x \le K$, und aus $K_1 \le x \le K_2$ folgt umgekehrt $|x| \le \max(|K_1|, |K_2|)$.

Beispiel 2.4 Die Menge $[0,1)$ ist nach oben beschränkt, eine obere Schranke ist zum Beispiel $K = 2011$. Es gibt in $[0,1)$ kein größtes Element, denn es gilt der Schluss

$$x \in [0,1) \quad \Rightarrow \quad x < \frac{x+1}{2} \in [0,1).$$

Unter den oberen Schranken von $[0,1)$ gibt es aber eine kleinste, nämlich die Zahl 1.

Definition 2.9 (Supremum/Infimum) *Die Zahl $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ heißt Supremum (bzw. Infimum) der Menge $M \subset \mathbb{R}$, wenn folgendes gilt:*

(1) *$x \le a$ für alle $x \in M$ (bzw. $x \ge a$ für alle $x \in M$),*

(2) *Für alle $a' < a$ (bzw. $a' > a$) gibt es ein $x \in M$ mit $x > a'$ (bzw. $x < a'$).*

Notation: $a = \sup M$ (bzw. $a = \inf M$). Ist M nach oben (bzw. unten) beschränkt, so bezeichnen wir $\sup M$ auch als kleinste obere Schranke (bzw. $\inf M$ als größte untere Schranke).

Satz 2.10 *Jede Menge $M \subset \mathbb{R}$ hat genau ein Supremum $S \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.*

Beweis: Wir zeigen als erstes die Eindeutigkeit. Angenommen es gibt $S_{1,2} \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, die beide die Definition 2.9 erfüllen. Wir können $S_1 < S_2$ annehmen. Nach Eigenschaft (2) bzgl. S_2 gibt es ein $x \in M$ mit $x > S_1$, im Widerspruch zur Eigenschaft (1) bezüglich S_1.

Man sieht leicht $\sup \emptyset = -\infty$, und $\sup M = +\infty$ falls M nicht nach oben beschränkt ist. Im verbleibenden Fall wählen wir ein Element a_1 von M und eine obere

Schranke b_1 von M, und konstruieren wie folgt eine Intervallschachtelung $I_n = [a_n, b_n]$ für $n \geq 1$, wobei $m_n = (a_n + b_n)/2$:

$$I_{n+1} = [a_{n+1}, b_{n+1}] = \begin{cases} [m_n, b_n], & \text{falls } [m_n, b_n] \cap M \neq \emptyset \\ [a_n, m_n], & \text{sonst.} \end{cases}$$

Nach dem Intervallschachtelungsprinzip, Satz 2.6, gibt es genau ein $S \in \mathbb{R}$ mit $S \in I_n$ für alle n, und genauer gilt $a_n \to S$ sowie $b_n \to S$. Für $x \in M$ sieht man durch Induktion $x \leq b_n$ für alle n, also $x \leq \lim_{n\to\infty} b_n = S$. Andererseits gilt, ebenfalls induktiv, $M \cap I_n \neq \emptyset$ für alle n, das heißt es gibt $x_n \in M$ mit $a_n \leq x_n \leq b_n$. Ist $S' < S$, so gilt also $x_n > S'$ für hinreichend große n. Damit ist $\sup M = S$ gezeigt. □

Folgerung 2.1 *Sei $M \subset \mathbb{R}$ nichtleer. Dann gibt es eine Folge $x_n \in M$ (bzw. $x'_n \in M$) mit $x_n \to \sup M$ (bzw. $x'_n \to \inf M$).*

Beweis: Wir zeigen die Aussage für das Supremum. Ist M nach oben beschränkt, so wurde eine solche Folge im Beweis des vorangehenden Satzes konstruiert. Ist M nicht nach oben beschränkt, so gibt es zu $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in M$ mit $x_n \geq n$, also $x_n \to +\infty = \sup M$. □

3 Mächtigkeit der Mengen und komplexe Zahlen

Jetzt wollen wir uns einer neuen Frage zuwenden: wie kann man die unendlichen Mengen $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ der Größe nach vergleichen? Gibt es wirklich mehr rationale Zahlen als natürliche? Mehr reelle als rationale? Die Antwort lautet witzigerweise, dass es gleich viele natürliche, ganze und rationale Zahlen gibt, aber mehr reelle Zahlen. Alle genannten Mengen enthalten unendlich viele Elemente. Die Präzisierung der Begriffe *gleichviele* und *mehr* geht auf Georg Cantor (1872) zurück.

Definition 3.1 *Eine Menge A heißt gleichmächtig zur Menge B (Notation: $A \sim B$), wenn es eine bijektive Abbildung (Bijektion) $\varphi : A \to B$ gibt.*

Lemma 3.1 *Die Relation $A \sim B$ (A ist gleichmächtig zu B) ist eine Äquivalenzrelation, das heißt für alle Mengen A, B, C gilt:*

(i) $A \sim A$

(ii) $A \sim B \quad \Rightarrow B \sim A$

(iii) $A \sim B$ und $B \sim C \quad \Rightarrow A \sim C$.

Beweis:

(i) Wähle als Bijektion die Identität $id_A : A \to A$, $a \longmapsto a$.

(ii) Sei $\varphi : A \to B$ Bijektion. Wähle dann $\varphi^{-1} : B \to A$.

(iii) Seien $\varphi : A \to B$ und $\psi : B \to C$ bijektiv. Wähle dann $\psi \circ \varphi : A \to C$.

□

Definition 3.2 *Eine Menge A heißt*

- *endlich, wenn sie gleichmächtig zu einer Menge $\{1, 2, \ldots, k\}$ mit $k \in \mathbb{N}$ ist;*
- *abzählbar unendlich, wenn sie gleichmächtig zu $\mathbb{N}$ ist;*
- *abzählbar, wenn sie endlich oder abzählbar unendlich ist;*
- *überabzählbar, wenn sie nicht abzählbar ist.*

Die Menge der natürlichen Zahlen ist nicht endlich, denn andernfalls gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ und eine Bijektion $f : \mathbb{N} \to \{1, \ldots, n\}$ im Widerspruch zum Schubfachprinzip (Satz 2.3).

Lemma 3.2 *Falls eine surjektive Abbildung $\varphi : \mathbb{N} \to A$ existiert, so ist A abzählbar.*

Beweis: Sei $a_n = \varphi(n)$. Die naheliegende Idee ist, bei der Abzählung induktiv diejenigen a_n auszulassen, die bereits vorher auftraten, und die restlichen entsprechend neu zu nummerieren. Dazu setzen wir $n_1 = 1$ und konstruieren induktiv eine Teilfolge a_{n_k} durch die Vorschrift

$$n_{k+1} = \min\{n > n_k : a_n \neq a_{n_j} \text{ für } j = 1, \ldots, k\}.$$

Falls die Rekursion nach einem n_k abbricht, ist die Abbildung $f : \{1, \ldots, k\} \to A$, $k \mapsto a_{n_k}$ bijektiv und damit ist A endlich. Andernfalls ist die Abbildung $f : \mathbb{N} \to A$, $k \mapsto a_{n_k}$ bijektiv und A ist abzählbar undendlich. $\square$

Satz 3.1 *Die Mengen $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ sind abzählbar.*

Beweis: Für $\mathbb{Z}$ wähle die surjektive (sogar bijektive!) Abbildung

$$\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{Z},\ \varphi(n) = \begin{cases} (n-1)/2 & n \text{ ungerade} \\ -n/2 & n \text{ gerade.} \end{cases}$$

Das Argument zeigt, dass wir uns beim Beweis der Abzählbarkeit von $\mathbb{Q}$ auf die Menge $\mathbb{Q}^+ = \{p/q : p, q \in \mathbb{N}\}$ beschränken können. Die Idee ist dann, diagonal nach folgendem Schema abzuzählen:

$$\begin{array}{llcccccc}
 & p = & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\
q = & & & & & & & \\
1 & & 1/1 & 2/1 & 3/1 & 4/1 & 5/1 & 6/1 \\
 & & \swarrow & \swarrow & \swarrow & \swarrow & \swarrow & \\
2 & & 1/2 & 2/2 & 3/2 & 4/2 & \cdot & \\
 & & \swarrow & \swarrow & \swarrow & \cdot & & \\
3 & & 1/3 & 2/3 & 3/3 & \cdot & & \\
 & & \swarrow & \swarrow & \cdot & & & \\
4 & & 1/4 & 2/4 & \cdot & & & \\
 & & \swarrow & \cdot & & & & \\
5 & & 1/5 & & & & &
\end{array}$$

Die k-te Diagonale enthält k Elemente, also enthalten die Diagonalen mit kleinerer Nummer insgesamt $1 + \ldots + (k-1) = (k-1)k/2$ Einträge. Wir behaupten, dass jedes $n \in \mathbb{N}$ in genau einem k-Abschnitt $\{(k-1)k/2 + i : i = 1, \ldots, k\}$ liegt. Zur Existenz sei $k \in \mathbb{N}$ maximal mit $(k-1)k/2 < n$. Dann gilt

$$(k-1)k/2 < n \leq k(k+1)/2 = (k-1)k/2 + k.$$

Für $l > k$ ist $(l-1)l/2+1 > k(k+1)/2 = (k-1)k/2+k$, das heißt die beiden Abschnitte sind disjunkt, womit die Eindeutigkeit gezeigt ist. Somit ist folgende Abbildung wohldefiniert:

$$\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{Q},\ \varphi(n) = \frac{k-i+1}{i} \quad \text{für } n = \frac{(k-1)k}{2} + i \quad (k \in \mathbb{N},\ 1 \leq i \leq k).$$

Die Abbildung ist surjektiv, und zwar gilt $\varphi(n) = p/q$ für $i = q$ und $k = p + q - 1$. Die Abzählbarkeit von $\mathbb{Q}$ folgt nun mit Lemma 3.2. $\square$

Durch Anordnung in einem quadratischen Schema und analoge Abzählung läßt sich ganz analog zeigen, daß eine abzählbare Vereinigung von jeweils abzählbaren Mengen abermals abzählbar ist.

Satz 3.2 ($\mathbb{R}$ ist nicht abzählbar) *Es gibt keine surjektive Abbildung $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.*

Beweis: Sei $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ eine beliebige Abbildung und $\varphi(n) = x_n$. Wir konstruieren eine Intervallschachtelung $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_n \notin I_n$ für jedes n. Ist I_n schon bestimmt, so zerlege I_n in drei abgeschlossene Teilintervalle gleicher Länge und wähle für I_{n+1} ein Teilintervall, das x_{n+1} nicht enthält (im Zweifelsfall das rechte). Um I_1 zu definieren, wenden wir dieses Argument an auf $I_0 = [0,1]$. Nach Satz 2.6 gibt es ein $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n \in \mathbb{R}$, also $x \neq x_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. $\square$

In Zukunft brauchen wir den Begriff der Konvergenz auch für Punkte im $\mathbb{R}^n$. Für $n = 1$ haben wir als Modell die Zahlengerade benutzt, entsprechend betrachten wir für $n = 2$ die Ebene mit kartesischen Koordinaten $z = (x, y)$ und für $n = 3$ den dreidimensionalen Raum mit Koordinaten $p = (x, y, z)$; dabei finde ich den zweidimensionalen Fall besonders anschaulich. Der $\mathbb{R}^n$ ist eine mathematische Verallgemeinerung:

$$\mathbb{R}^n = \{x = (x_1, \ldots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}\} = \underbrace{\mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}}_{n \text{ mal}}.$$

Genauer Definitionen finden Sie in der Vorlesung LA1.
Für uns hat der Fall $n = 2$ der Euklidischen Ebene eine besondere Bedeutung, denn aus dem Vektorraum $(\mathbb{R}^2, +)$ wird mit einer geeigneten Multiplikation der Körper $\mathbb{C} = (\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ der komplexen Zahlen. Die Verknüpfungen sind dabei wie folgt definiert:

Die Addition ist die Vektorraumaddition von $\mathbb{R}^2$. Die Standardbasis wird mit $(1,0) = 1$ und $(0,1) = i$ bezeichnet, das heißt jedes $z = (x,y) \in \mathbb{R}^2$ besitzt die Basisdarstellung $z = x + iy$. Damit lautet die Addition von $x_k + iy_k$, $k = 1, 2$,

$$(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2).$$

Mit diesen Vereinbarungen gilt $x = x + i0 = (x, 0)$ für $x \in \mathbb{R}$, das heißt $\mathbb{R}$ wird mit der x-Achse in $\mathbb{R}^2$ identifiziert. Für $z = x + iy$ heißt $x =: \operatorname{Re} z \in \mathbb{R}$ der Realteil und $y = \operatorname{Im} z \in \mathbb{R}$ der Imaginärteil von z.

Die Multiplikation ergibt sich durch die Forderung $i^2 = -1$ und Ausmultiplizieren nach den Körpergesetzen:

$$(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1x_2 + i^2 y_1y_2 + i(x_1y_2 + x_2y_1) = x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_1y_2 + x_2y_1).$$

Für $\lambda \in \mathbb{R}$ ist $\lambda(x+iy) = (\lambda + i0)(x+iy) = \lambda x + i\lambda y = (\lambda x, \lambda y) = \lambda(x,y)$, das heißt Multiplikation mit $\lambda \in \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ ist einfach Skalarmultiplikation im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^2$. Dagegen liefert die Multiplikation mit i für $(x,y) = x+iy \in \mathbb{C}$

$$i(x,y) = i(x+iy) = -y + ix = (-y, x).$$

Der Vektor $(-y,x)$ entsteht anschaulich aus (x,y) durch Drehung um $90°$ im mathematisch positiven Sinn, das heißt gegen den Uhrzeigersinn.

Die Körpergesetze in $\mathbb{C}$ folgen leicht aus den Definitionen, nur die Bestätigung des Assoziativgesetzes der Multiplikation erfordert etwas Rechenarbeit. Um das inverse Element der Multiplikation anzugeben, ist ein weiterer Begriff nützlich: für $z = x+iy \in \mathbb{C}$ heißt $\overline{z} = x - iy \in \mathbb{C}$ die zu z konjugiert komplexe Zahl. Anschaulich ergibt sich $\overline{z}$ aus z durch Spiegelung an der x-Achse, insbesondere gilt $\overline{\overline{z}} = z$.

Lemma 3.3 *Für die komplexe Konjugation gelten folgende Regeln:*

(1) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2},\ \overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2},$

(2) $\overline{z} = z \quad \Leftrightarrow \quad z \in \mathbb{R},$

(3 *Für* $z = x+iy$ *ist* $\mathrm{Re}\, z = \frac{1}{2}(z+\overline{z})$ *und* $\mathrm{Im}\, z = \frac{1}{2i}(z - \overline{z})$.

Beweis: Die Beweise erfolgen alle durch Nachrechnen, zum Beispiel gilt

$$\overline{z_1}\,\overline{z_2} = (x_1 - iy_1)(x_2 - iy_2) = x_1x_2 - y_1y_2 - i(x_1y_2 + y_1x_2) = \overline{z_1 z_2}.$$

□

Die komplexen Zahlen entstehen aus $\mathbb{R}^2$ durch Hinzunahme der Multiplikation als zusätzliche Struktur. Man nennt die Euklidische Norm

$$|z| = \sqrt[+]{x^2 + y^2} \qquad \text{für } z = x + iy$$

auch den Betrag der komplexen Zahl z.

Lemma 3.4 *Für den Betrag einer komplexen Zahl gelten folgende Regeln:*

(1) $|z|^2 = z\,\overline{z}.$

(2) $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|.$

(3) $|\mathrm{Re}\, z| \le |z|,\ |\mathrm{Im}\,(z)| \le |z|.$

Beweis: Für Aussage (1) berechnen wir mit $z = x + iy$

$$z\overline{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2 + y^2 = |z|^2.$$

Die Formel (2) folgt aus (1), Lemma 3.3(1) und den Körpergesetzen:

$$|z_1z_2|^2 = (z_1z_2)(\overline{z_1z_2}) = z_1\,\overline{z_1}\,z_2\overline{z_2} = |z_1|^2\,|z_2|^2.$$

Die Ungleichungen (3) sind offensichtlich. □

Damit können wir nun das inverse Element der Multiplikation leicht hinschreiben, und zwar folgt aus Lemma 3.4(1) für $z = x + iy \neq 0$

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z\,\overline{z}} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}.$$

4 Reihen

Viele Funktionen in der Analysis können als unendliche Reihen definiert beziehungsweise dargestellt werden. Darum ist es wichtig, die Konvergenzfrage für Reihen zu untersuchen. Als erste Anwendung der Konvergenzaussagen definieren wir die Exponentialfunktion. Um später den Zusammenhang zu den trigonometrischen Funktionen zu sehen, arbeiten wir direkt in $\mathbb{C}$ statt nur in $\mathbb{R}$, zumal sich die Argumente nur wenig unterscheiden.

Definition 4.1 *Eine Folge $(S_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ heißt Reihe mit Gliedern $a_n \in \mathbb{C}$, falls gilt:*

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \quad \textit{für alle } n \in \mathbb{N}_0.$$

Die Reihe heißt konvergent mit Wert $S \in \mathbb{C}$, wenn die Folge $(S_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ gegen S konvergiert:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n = S.$$

Die Zahl S_n wird auch als n-te Partialsumme der Reihe bezeichnet. Oft wird die Reihe in der Form $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots$ durch ihre ersten Glieder angegeben. Leider ist es auch üblich, die Reihe selbst - unabhängig von der Frage der Konvergenz - ebenfalls mit dem Symbol $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ zu bezeichnen.

Beispiel 4.1 Die Reihe $\dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \dfrac{1}{3\cdot 4} + \ldots$ wird auch mit $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$ bezeichnet. Gemeint ist jeweils die Folge $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit den Gliedern

$$S_1 = \frac{1}{1\cdot 2} = \frac{1}{2}, \quad S_2 = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} = \frac{2}{3}, \quad S_3 = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} = \frac{3}{4}, \ldots$$

Für die betrachtete Reihe gilt, für alle $n \in \mathbb{N}$,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Also ist die Reihe konvergent mit Wert

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1.$$

Die Regeln für die Addition von konvergenten Reihen sowie die Multiplikation von konvergenten Reihen mit reellen oder komplexen Zahlen ergeben sich direkt aus den entsprechenden Regeln für konvergente Folgen, siehe Satz 1.3 a) in Kapitel 1. So ist für konvergente Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ auch die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty}(\lambda a_k + \mu b_k)$ konvergent und es gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty}(\lambda a_k + \mu b_k) = \lambda \sum_{k=0}^{\infty} a_k + \mu \sum_{k=0}^{\infty} b_k.$$

Durch Abänderung, Hinzufügen oder Weglassen von endlich vielen Gliedern in einer Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ wird die Konvergenz oder Divergenz nicht beeinflusst, sondern nur der Wert der Reihe. Zum Beispiel haben wir für $n \in \mathbb{N}_0$ und $m \geq n$

$$\sum_{k=n}^{m} a_k = \sum_{k=0}^{m} a_k - \sum_{k=0}^{n-1} a_k,$$

und mit $m \to \infty$ folgt, falls die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergiert,

$$\sum_{k=n}^{\infty} a_k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k - \sum_{k=0}^{n-1} a_k. \tag{4.1}$$

Wie bei Folgen kann der Anfangsindex einer Reihe statt $k = 0$ auch eine andere Zahl sein, zum Beispiel $k = 1$ wie in Beispiel 4.1 Allgemein ist eine Reihe nichts anderes als eine Folge $(S_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$, die gegeben ist durch die Differenzen $a_n = S_{n+1} - S_n$ und das erste Folgenglied $S_0 = a_0$. Es stellen sich nun zwei Fragen:

- Wie kann ich den Gliedern a_n der Reihe ansehen, ob die Reihe konvergiert bzw. divergiert?
- Im Fall der Konvergenz: welchen Wert hat die Reihe?

Bei der zweiten Frage ist zum Beispiel gemeint, ob eine bereits definierte Zahl wie $\sqrt{2}$, e, π, ... als Grenzwert einer Reihe dargestellt werden kann. Im Folgenden steht aber die erste Frage im Zentrum des Interesses. Dabei ist das nächste Beispiel fundamental.

Beispiel 4.2 (Geometrische Reihe) Die geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$ mit $z \in \mathbb{C}$ konvergiert genau für $|z| < 1$. Der Konvergenzbeweis ist derselbe wie in Beispiel 1.8, und zwar folgt aus Beispiel 2.2

$$\sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} \to \frac{1}{1 - z} \quad \text{mit } n \to \infty.$$

Dagegen gilt für $|z| \geq 1$ mit $S_n = \sum_{k=0}^{n} z^k$

$$|S_{n+1} - S_n| = |z^{n+1}| = |z|^{n+1} \geq 1,$$

so dass $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ keine Cauchyfolge sein kann.

Beispiel 4.3 (Unendliche Dezimalbrüche) Ist $(k_j)_{j \in \mathbb{N}_0}$ eine Folge von Ziffern $k_j \in \{0, 1, \ldots, 9\}$, so ist die Reihe $\sum_{j=0}^{\infty} k_j\, 10^{-j}$ konvergent, vgl. Satz 2.3.

Beispiel 4.4 (Harmonische Reihe) Die harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k$ ist bestimmt divergent gegen $+\infty$. Dies zeigen wir, indem wir in den Partialsummen wie folgt Klammern setzen:

$$\underbrace{\left(\frac{1}{1}\right)}_{\geq 1/2} + \underbrace{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)}_{\geq 1/2} + \underbrace{\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right)}_{\geq 1/2} + \underbrace{\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{15}\right)}_{\geq 1/2} + \ldots$$

Die Summe der $1/k$ mit $2^m \leq k < 2^{m+1}$ ist nach unten abgeschätzt durch $2^m \cdot 2^{-(m+1)} = 1/2$.

Nach diesen ersten Beispielen kommen nun zur allgemeinen Konvergenzfrage für Reihen, und beginnen mit einem notwendigen Kriterium.

Satz 4.1 (Nullfolgentest) *Ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergent, so folgt $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$.*

BEWEIS: Nach Voraussetzung ist die Folge der Partialsummen $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ konvergent mit Grenzwert $S \in \mathbb{C}$, also folgt $a_n = S_n - S_{n-1} \to S - S = 0$. □

Als nächstes formulieren wir unsere Konvergenzkriterien für Folgen neu in der Situation von Reihen. Die Cauchyfolgeneigenschaft sieht wie folgt aus.

Satz 4.2 (Konvergenzkriterium von Cauchy) *Eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergiert dann und nur dann, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{R}$ gibt, so dass gilt:*

$$\left|\sum_{k=n}^{m} a_k\right| < \varepsilon \qquad \textit{für alle } n, m \in \mathbb{N}_0 mit m \geq n > N.$$

BEWEIS: Satz 2.2. □

Satz 4.3 (Reihen mit Gliedern $a_k \geq 0$) *Eine reelle Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ mit $a_k \geq 0$ für alle k konvergiert genau dann, wenn die Folge der Partialsummen $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ nach oben beschränkt ist.*

BEWEIS: Da $a_k \geq 0$, ist die Folge (S_n) der Partialsummen monoton wachsend. Die Behauptung folgt aus Kapitel 1, Satz 2.5 und Satz 1.2. □

Beispiel 4.5 Für $s > 1$ ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-s}$ konvergent. Wie summieren wie in Beispiel 4.4 über $2^m \leq k < 2^{m+1}$ und erhalten pro Abschnitt

$$\sum_{2^m \leq k < 2^{m+1}} k^{-s} \leq 2^m \cdot (2^m)^{-s} = (2^{1-s})^m.$$

Es folgt für $n < 2^{M+1}$ mit der geometrischen Reihe, Beispiel 1.8,

$$\sum_{k=1}^{n} k^{-s} \leq \sum_{m=0}^{M} \left(\sum_{2^m \leq k < 2^{m+1}} k^{-s} \right) \leq \sum_{m=0}^{M} (2^{1-s})^m \leq \frac{1}{1 - 2^{1-s}}.$$

Die Behauptung folgt nun aus Satz 4.3. Wir haben damit eine wohldefinierte Funktion

$$\zeta : (1, \infty) \to \mathbb{R},\, \zeta(s) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-s},$$

die sogenannte Riemannsche Zetafunktion. Sie spielt bei der Untersuchung von Primzahlen eine fundamentale Rolle.

Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1}/k = 1 - 1/2 + 1/3 - + \ldots$ ist ein Beispiel für eine sogenannte alternierende Reihe. Während die entsprechende Reihe mit nur positiven Vorzeichen nicht konvergiert – es ist die harmonische Reihe aus Beispiel 4.4 – ist die Reihe mit dem Vorzeichenwechsel konvergent. Dies ergibt sich aus dem nächsten Satz, bei dessen Beweis wieder Monotonieargumente eine wesentliche Rolle spielen.

Satz 4.4 (Leibniz-Kriterium für alternierende Reihen) *Sei a_k, $k \in \mathbb{N}_0$, eine reelle, monoton fallende Nullfolge (also insbesondere $a_k \geq 0$). Dann ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k$ konvergent. Außerdem gilt für alle $n \in \mathbb{N}_0$ die Abschätzung*

$$0 \leq (-1)^n \sum_{k=n}^{\infty}(-1)^k a_k \leq a_n.$$

Beweis: Wir betrachten die Partialsummen $S_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k a_k$. Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gelten die Ungleichungen

$$\begin{aligned} S_{2n+2} - S_{2n} &= (-1)^{2n+2}a_{2n+2} + (-1)^{2n+1}a_{2n+1} = a_{2n+2} - a_{2n+1} \leq 0, \\ S_{2n+3} - S_{2n+1} &= (-1)^{2n+3}a_{2n+3} + (-1)^{2n+2}a_{2n+2} = a_{2n+2} - a_{2n+3} \geq 0, \\ S_{2n+1} - S_{2n} &= (-1)^{2n+1}a_{2n+1} = -a_{2n+1} \leq 0. \end{aligned}$$

Also ist die Folge $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}_0}$ monoton fallend, die Folge $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}_0}$ monoton wachsend. Wegen $S_{2n} \geq S_{2n+1}$ ist die Folge S_{2n} nach unten beschränkt durch S_1, die Folge S_{2n+1} nach oben beschränkt durch S_0. Nach Satz 2.5 sind die Folgen S_{2n} sowie S_{2n+1} konvergent. Aber $S_{2n+1} - S_{2n} \to 0$, das heißt beide Folgen, und damit die gesamte Folge, konvergieren gegen denselben Grenzwert $S \in \mathbb{R}$. Nun ist $S \in [S_1, S_0]$ mit $S_0 = a_0$ und $S_1 = a_1 - a_0 \geq 0$, also gilt die Abschätzung im Fall $n = 0$. Anwendung auf die Folge $b_k = a_{n+k}$ liefert nun die Abschätzung für beliebige $n \in \mathbb{N}_0$. □

Bei der alternierenden Reihe $1 - 1/2 + 1/3 - + \ldots$ stößt man auf Merkwürdigkeiten, wenn man die Summationsreihenfolge ändert. Während die Ausgangsreihe konvergent ist, ist die durch Umordnung entstehende Reihe

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{6}\right) + \ldots.$$

bestimmt divergent gegen $+\infty$, denn die Summe der positiven Zahlen in der m-ten Klammer ist mindestens $2^{m-1} \cdot 2^{-(m+1)} = 1/4$. Dies ist ein interessantes Phänomen, jedoch sind wir in erster Linie an Reihen interessiert, deren Konvergenz stabiler ist. Dabei ist der folgende Begriff zentral.

Definition 4.2 *Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ mit $a_k \in \mathbb{C}$ heißt absolut konvergent, wenn die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ konvergiert, das heißt $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| < \infty$.*

Satz 4.5 (absolut konvergent ⇒ konvergent) *Wenn die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konvergiert, so ist sie konvergent und es gilt*

$$\left|\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|.$$

Beweis: Die Dreiecksungleichung besagt

$$\left|\sum_{k=n}^{m} a_k\right| \leq \sum_{k=n}^{m} |a_k| \quad \text{für } m \geq n \geq 0.$$

Aus dem Cauchykriterium für $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ folgt deshalb das Cauchykriterium für $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$, das heißt die Reihe konvergiert nach Satz 4.2. Die Abschätzung folgt, indem wir in der Dreiecksungleichung $n = 0$ setzen und $m \to \infty$ gehen lassen. □

Der folgende Satz fasst die wesentlichen Kriterien für die absolute Konvergenz von Reihen zusammen.

Satz 4.6 (Tests für absolute Konvergenz) *Sei* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *eine Reihe mit* $a_k \in \mathbb{C}$. *Ist eine der drei folgenden Bedingungen erfüllt, so ist* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *absolut konvergent:*

(a) Majorantenkriterium (M-Test): *Es gilt* $|a_k| \leq c_k \in [0,\infty)$ *mit* $\sum_{k=0}^{\infty} c_k < \infty$.

(b) Quotientenkriterium: *Es gibt ein* $\theta \in [0,1)$ *und ein* $n \in \mathbb{N}$ *mit*

$$\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} \leq \theta \textit{ für alle } k \geq n \quad (\textit{wobei } a_k \neq 0 \textit{ für } k \geq n).$$

(c) Wurzelkriterium: *Es gibt ein* $\theta \in [0,1)$ *und ein* $n \in \mathbb{N}$ *mit* $\sqrt[k]{|a_k|} \leq \theta$ *für alle* $k \geq n$.

Umgekehrt ist die Reihe divergent, wenn für ein $n \in \mathbb{N}$ *gilt:*

$$\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} \geq 1 \quad \textit{oder} \quad \sqrt[k]{|a_k|} \geq 1 \textit{ für alle } k \geq n.$$

Für die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-s}$ mit $s \geq 1$ haben wir

$$\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \left(\frac{k}{k+1}\right)^s < 1 \text{ für alle } k \quad \text{und} \quad \lim_{k\to\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = 1.$$

Für $s = 1$ gilt Divergenz nach Beispiel 4.4; also reicht es in (b) *nicht*, nur die Abschätzung $|a_{k+1}|/|a_k| < 1$ vorauszusetzen. Andererseits konvergiert die Reihe für $s > 1$ nach Beispiel 4.5, also kann aus $\lim_{k\to\infty} |a_{k+1}|/|a_k| = 1$ auch nicht auf Divergenz geschlossen werden. Eine ganz analoge Diskussion gilt für das Wurzelkriterium. Die Bedingungen (b) beziehungsweise (c) sind äquivalent zu den folgenden Voraussetzungen:

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} < 1 \quad \text{bzw.} \quad \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} < 1.$$

Beweis des Satzes: (a) folgt aus Satz 4.3, denn für alle $n \in \mathbb{N}$ hat man die obere Schranke

$$\sum_{k=0}^{n} |a_k| \leq \sum_{k=0}^{n} c_k \leq \sum_{k=0}^{\infty} c_k < \infty.$$

Voraussetzung (b) liefert per Induktion

$$|a_k| \leq \theta^{k-n} |a_n| \quad \text{für } k \geq n.$$

Da die geometrische Reihe wegen $0 \leq \theta < 1$ nach Beispiel 1.8 konvergiert, folgt die Behauptung aus (a) und wir erhalten außerdem die Abschätzung

$$\sum_{k=n}^{\infty} |a_k| \leq \frac{|a_n|}{1-\theta}. \tag{4.2}$$

Unter der Voraussetzung (c) gilt

$$|a_k| \leq \theta^k \qquad \text{für } k \geq n.$$

Wieder folgt die Behauptung durch durch M-Test mit der geometrischen Reihe. Die Abschätzung lautet hier

$$\sum_{k=n}^{\infty} |a_k| \leq \frac{\theta^n}{1-\theta}. \tag{4.3}$$

Die Divergenzaussagen folgen unmittelbar aus dem Nullfolgentest, Satz 4.1. □

Als Anwendung kommt nun endlich die

Satz 4.7 (Definition der Exponentialfunktion) *Die Reihe* $\sum_{k=0}^{\infty} z^k/k!$ *ist für alle* $z \in \mathbb{C}$ *absolut konvergent; damit ist die Exponentialfunktion*

$$\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ \exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$

wohldefiniert. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ *und* $|z| \leq (n+1)/2$ *gilt die Abschätzung*

$$\left| \exp(z) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{z^k}{k!} \right| \leq \frac{2|z|^n}{n!}.$$

Beweis: Für $z = 0$ ist nichts zu zeigen. Seien $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ und $n \in \mathbb{N}$ mit $|z| \leq (n+1)/2$. Dann gilt für $k \geq n$ mit $a_k = z^k/k!$

$$\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \frac{|z|}{k+1} \leq \frac{1}{2}.$$

Aus dem Quotientenkriterium, Satz 4.6(b), folgt die absolute Konvergenz. Außerdem liefert die Ungleichung (4.2), hier mit $\theta = 1/2$ und $a_n = z^n/n!$,

$$\sum_{k=n}^{\infty} \left| \frac{z^k}{k!} \right| \leq \frac{|z^n/n!|}{1 - 1/2} = \frac{2|z|^n}{n!},$$

das heißt

$$\left| \exp(z) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{z^k}{k!} \right| = \left| \sum_{k=n}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \right| \leq \sum_{k=n}^{\infty} \left| \frac{z^k}{k!} \right| \leq \frac{2|z|^n}{n!}.$$

□

Wegen $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ ist durch Satz 4.7 auch die reelle Exponentialfunktion

$$\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

erklärt. Nach Definition 2.2 gilt $\exp(1) = e \approx 2,7\ldots$. Außerdem sieht man wie in Beispiel 2.3

$$\exp(x) = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Eine charakteristische Eigenschaft der Exponentialfunktion ist die Funktionalgleichung $\exp(z + w) = \exp(z)\exp(w)$. Um diese zu beweisen, brauchen wir einen Satz zur Multilplikation von Reihen.

Bei der Multiplikation von zwei Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ treten die doppelt indizierten Produkte $a_k b_l$ mit $k, l \in \mathbb{N}_0$ auf. Es ist zunächst nicht klar, in welcher Reihenfolge diese summiert werden sollen. Schreiben wir die Produkte in einem Schema auf, so dass $a_k b_l$ in der k-ten Zeile und l-ten Spalte steht, so ist folgendes Summationsverfahren naheliegend: erst werden die $n + 1$ Produkte $a_k b_l$ in jeder Diagonale $k + l = n$ addiert, dann wird die Konvergenz der resultierenden Reihe studiert. Im folgenden sind stets $k, l \in \mathbb{N}_0$ und wir schreiben zum Beispiel kurz $\sum_{k+l=n}$ für die Summe über alle Paare $k, l \in \mathbb{N}_0$ mit $k + l = n$.

Satz 4.8 (Cauchyprodukt) *Die Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ seien absolut konvergent. Dann ist auch die Reihe*

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_n \quad \textit{mit} \quad c_n = \sum_{k+l=n} a_k b_l = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

absolut konvergent, und es gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k+l=n} a_k\, b_l \right) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k \right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k \right).$$

Beweis: Wir setzen für $N \in \mathbb{N}_0$

$$A_N := \sum_{k=0}^{N} |a_k| \to \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| =: A \quad \text{und} \quad B_N := \sum_{k=0}^{N} |b_k| \to \sum_{k=0}^{\infty} |b_k| =: B,$$

wobei nach Voraussetzung $A, B < \infty$. Es folgt

$$\sum_{n=0}^{N} |c_n| \le \sum_{k+l \le N} |a_k|\,|b_l| \le \sum_{k,l \le N} |a_k|\,|b_l| = A_N B_N \le AB < \infty.$$

Nach Satz 4.3 ist $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ absolut konvergent und insbesondere konvergent (Satz 4.5). Um den Grenzwert zu identifizieren, reicht es also die geraden Partialsummen $\sum_{n=0}^{2N} c_n$ zu betrachten. Wir berechnen

$$\left| \left(\sum_{k=0}^{2N} a_k \right) \cdot \left(\sum_{l=0}^{2N} b_l \right) - \sum_{n=0}^{2N} c_n \right| = \left| \sum_{k,l \le 2N} a_k b_l - \sum_{k+l \le 2N} a_k b_l \right| \le \sum_{k,l \le 2N, \max(k,l) > N} |a_k|\,|b_l|,$$

Die rechte Seite ist gleich $A_{2N}\, B_{2N} - A_N\, B_N$, konvergiert also gegen Null für $N \to \infty$. Für die letzte Abschätzung ist es hilfreich, die Indexbereiche zu skizzieren. Jedenfalls ist damit die gewünschte Formel für das Cauchyprodukt bewiesen. □

Wir wenden nun den Produktsatz auf die Exponentialfunktion an.

Satz 4.9 (Funktionalgleichung der Exponentialfunktion) *Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt*

$$\exp(z + w) = \exp(z) \exp(w).$$

Beweis: Da die Reihen absolut konvergieren, erhalten wir mit Satz 4.8 und der Binomischen Formel, Satz 2.6,

$$\exp(z)\exp(w) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}\frac{w^{n-k}}{(n-k)!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} z^k w^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+w)^n}{n!} = \exp(z+w).$$

□

Wir wollen daraus direkt einige Eigenschaften der Exponentialfunktion herleiten. Dazu brauchen wir noch eine einfache Tatsache.

Lemma 4.1 *Für $a_k \in \mathbb{C}$ sei die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergent. Dann ist auch die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \overline{a}_k$ konvergent und mit $S = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$ gilt*

$$\overline{S} = \sum_{k=0}^{\infty} \overline{a}_k.$$

Beweis: Mit $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ gilt $\overline{S}_n = \sum_{k=0}^{\infty} \overline{a}_k$ und (wie für jede Folge)

$$|\overline{S} - \overline{S}_n| = |\overline{S - S_n}| = |S - S_n| \to 0 \quad \text{mit } n \to \infty.$$

□

Folgerung 4.1 *Die Exponentialfunktion hat folgende Eigenschaften:*

(1) $\exp(z)\exp(-z) = 1$ *für alle* $z \in \mathbb{C}$*, insbesondere* $\exp(z) \neq 0$.

(2) $\exp(x) > 0$ *für alle* $x \in \mathbb{R}$.

(3) $|exp(iy)| = 1$ *für alle* $y \in \mathbb{R}$.

(4) $\exp(pz) = (\exp(z))^p$ *für alle* $z \in \mathbb{C}$*,* $p \in \mathbb{Z}$.

Beweis: Behauptung (1) folgt sofort aus Satz 4.9, denn

$$\exp(z)\exp(-z) = \exp\big(z + (-z)\big) = \exp(0) = 1.$$

Für $x > 0$ ist trivialerweise $\exp(x) \in (1, \infty)$, und für $x < 0$ folgt $\exp(x) = 1/\exp(-x) \in (0,1)$ aus Gleichung (1). Aus Lemma 4.1 folgt

$$\overline{\exp(z)} = \overline{\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!}\right)} = \sum_{k=0}^{\infty}\overline{\left(\frac{z^k}{k!}\right)} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\overline{z}^k}{k!} = \exp(\overline{z}).$$

Gleichung (3) ergibt sich nun mit Lemma 3.4:

$$|\exp(iy)|^2 = \exp(iy)\overline{exp(iy)} = \exp(iy)\exp(\overline{iy}) = \exp(iy)\exp(-iy) = 1.$$

Für $p \in \mathbb{N}_0$ folgt Behauptung (4) mit der Funktionalgleichung durch Induktion, und ebenfalls mit der Funktionalgleichung gilt für $p \in \mathbb{N}$

$$1 = \exp(pz)\exp(-pz) = (\exp(z))^p \exp(-pz)), \text{ also } \exp(-pz) = (\exp(z)^p)^{-1} = \exp(z)^{-p}.$$

Damit sind alle Aussagen bewiesen. $\square$

In der Sprache der Algebra besagt die Funktionalgleichung, in Verbindung mit Folgerung 4.1(1), dass die Exponentialfunktion ein Gruppenhomomorphismus von der Gruppe $(\mathbb{C},+)$ in die Gruppe $(\mathbb{C}\backslash\{0\},\cdot)$ ist. Die reelle Exponentialabbildung ist analog ein Gruppenhomomorphismus von $(\mathbb{R},+)$ nach $(\mathbb{R}^+,\cdot)$, wobei $\mathbb{R}^+$ die positiven reellen Zahlen bezeichnet.

Bislang haben wir außer neuerdings der Exponentialfunktion nur Polynome beziehungsweise stückweise Polynome als Funktionen zur Verfügung. Es ist naheliegend, weitere neue Funktionen ebenfalls als Grenzwerte von Folgen bzw. Reihen von Polynomen zu suchen. Dies führt auf den Begriff der Potenzreihe.

Definition 4.3 (Potenzreihen) *Eine komplexe Potenzreihe ist eine Reihe der Form*

$$P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \qquad \textit{mit } a_k \in \mathbb{C}.$$

Allgemeiner betrachtet man auch Potenzreihen mit Entwicklungspunkt $z_0 \in \mathbb{C}$, das heißt Reihen der Form $P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$. Der Einfachheit halber beschränken wir uns jedoch hier auf den Fall $z_0 = 0$.

Definition 4.3 lässt offen, ob beziehungsweise für welche $z \in \mathbb{C}$ die Reihe tatsächlich konvergiert. Natürlich ist $P(0) = a_0$, es kann aber sein, dass die Reihe für alle $z \neq 0$ divergiert, dann ist sie natürlich nicht von Interesse. Ein Beispiel ist $\sum_{n=0}^{\infty} n^n z^n$, wie der Nullfolgentest sofort ergibt. Bei interessanten Reihen (was immer das ist) erwarten wir aber Konvergenz zumindest für manche $z \in \mathbb{C}$. Auf dem Konvergenzgebiet erhalten wir dann eine Funktion, und genau daran sind wir interessiert. Zum Beispiel konvergiert die Exponentialreihe sogar für alle $z \in \mathbb{C}$, und definiert die Exponentialfunktion. Erstaunlicherweise kann über das Konvergenzgebiet einer Potenzreihe eine allgemeine Aussage getroffen werden. Dazu benötigen wir das folgende technische Lemma, dessen Abschätzung (4.5) noch mehrfach benutzt wird.

Lemma 4.2 *Sei $P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ eine Potenzreihe mit $a_k \in \mathbb{C}$, die für ein $z_0 \neq 0$ konvergiert. Dann gibt es ein $M \in [0,\infty)$ mit*

$$|a_k|\,|z_0|^k \leq M \quad \textit{für alle } k \in \mathbb{N}_0. \tag{4.4}$$

Aus (4.4) folgt weiter, dass $P(z)$ für $|z| < |z_0|$ absolut konvergiert und dass für $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$|P(z) - P_n(z)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k|\,|z|^k \leq \frac{M}{1-\frac{|z|}{|z_0|}} \left(\frac{|z|}{|z_0|}\right)^{n+1}. \tag{4.5}$$

Hier ist $P_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ die n-te Partialsumme.

Beweis: Für $|z| < |z_0|$ gilt $|a_k z^k| = |a_k|\,|z_0|^k(|z|/|z_0|)^k \leq M(|z|/|z_0|)^k$. Wegen $|z|/|z_0| < 1$ folgt die absolute Konvergenz aus dem Majorantenkriterium durch Vergleich mit der geometrischen Reihe. Genauer gilt

$$|P(z) - P_n(z)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k||z|^k \leq M \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{|z|}{|z_0|}\right)^k \leq \frac{M}{1-\frac{|z|}{|z_0|}} \left(\frac{|z|}{|z_0|}\right)^{n+1}.$$

$\square$

Satz 4.10 (vom Konvergenzradius) *Zu jeder Potenzreihe $P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ gibt es genau ein $R \in [0,\infty]$, den Konvergenzradius, mit folgender Eigenschaft:*

$$P(z) \text{ ist } \begin{cases} \textit{absolut konvergent} & \textit{für } |z| < R, \\ \textit{divergent} & \textit{für } |z| > R. \end{cases}$$

Beweis: Die Eindeutigkeit von R ist klar. Zur Existenz definieren wir

$$R = \sup\{|z| : P(z) \text{ konvergiert}\} \in [0,\infty].$$

Ist $|z| < R$, so gibt es nach Definition ein $z_0 \in \mathbb{C}$ mit $|z| < |z_0| \leq R$, so dass $P(z_0)$ konvergiert. Also konvergiert $P(z)$ absolut wegen Lemma 4.2. Andererseits ist die Reihe divergent für $|z| > R$ nach Definition von R. $\square$

Beispiel 4.6 Als weiteres Beispiel einer Potenzreihe betrachten wir für beliebiges $\alpha \in \mathbb{C}$ die Binomialreihe

$$B_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} z^k = 1 + \alpha z + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} z^2 + \ldots$$

Für $\alpha \in \mathbb{N}_0$ bricht die Reihe nach $k = \alpha$ ab, und die Binomische Formel aus Satz 2.6 liefert $B_\alpha(z) = (1+z)^\alpha$. Im folgenden sei nun $\alpha \notin \mathbb{N}_0$. Für $z \neq 0$ ist dann $a_k = \binom{\alpha}{k} z^k \neq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$, und es gilt

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{|\alpha - k|}{k+1}|z| \to |z| \quad \text{mit } k \to \infty.$$

Nach dem Quotientenkriterium konvergiert die Reihe für $|z| < 1$ und divergiert für $|z| > 1$, das heißt der Konvergenzradius ist $R = 1$.

Für eine gegebene reelle Funktion $f : (-R,R) \to \mathbb{R}$ stellt sich die Frage, ob die Funktion durch eine Potenzreihe dargestellt werden kann: gibt es $a_k \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ für $x \in (-R,R)$, oder zumindest auf einem kleineren Intervall $x \in (-r,r)$? Wenn ja, sind die a_k eindeutig bestimmt? Natürlich kann diese Frage auch über $\mathbb{C}$ gestellt werden, anstelle der Intervalle treten dann Kreisscheiben $B_R(0) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$. Das folgende Ergebnis zeigt, dass bei weitem nicht jede Funktion als Potenzreihe darstellbar ist. Zu der Folgerung vergleiche auch die entsprechende Aussage für Polynome, Satz **??**.

Satz 4.11 (Identitätssatz für Potenzreihen) *Sei $P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ eine Potenzreihe, die für ein $z_0 \neq 0$ konvergiert. Ist $0 \in \mathbb{C}$ Häufungspunkt der Menge $\{z \in \mathbb{C} : P(z) = 0\}$, so folgt $a_k = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$.*

Beweis: Wir nehmen induktiv an, dass schon $a_0 = a_1 = \ldots = a_{n-1} = 0$ gezeigt ist, wobei der Fall $n = 0$ den Induktionsanfang liefert. Für $|z| \leq |z_0|/2$ folgt aus (4.5) die Abschätzung

$$|P(z) - a_n z^n| = |P(z) - P_n(z)| \leq C|z|^{n+1} \quad \text{wobei } C = 2M|z_0|^{-(n+1)}.$$

Nach Voraussetzung gilt $P(z_i) = 0$ für eine Folge $z_i \neq 0$ mit $z_i \to 0$, und Einsetzen von $z = z_i$ ergibt $|a_n|\,|z_i|^n \leq C|z_i|^{n+1}$, also $|a_n| \leq C|z_i| \to 0$ mit $i \to \infty$, das heißt $a_n = 0$. $\square$

Folgerung 4.2 (Koeffizientenvergleich) *Seien* $P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ *und* $Q(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$ *Potenzreihen mit positivem Konvergenzradius. Ist der Nullpunkt Häufungspunkt der Menge* $\{z \in \mathbb{C} : P(z) = Q(z)\}$*, so folgt* $a_k = b_k$ *für alle* $k \in \mathbb{N}_0$*.*

Beweis: Die Potenzreihe $F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ mit $c_k = a_k - b_k$ hat positiven Konvergenzradius, und der Nullpunkt ist Häufungspunkt der Menge $\{z \in \mathbb{C} : F(z) = 0\}$. Die Behauptung folgt damit aus Satz 4.11. □

Zum Schluss dieses Kapitels kommen wir zu der Frage der Umordnung von Reihen zurück und zeigen, dass absolut konvergente Reihen beliebig umgeordnet werden können.

Satz 4.12 (Umordnungssatz) *Sei* $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *bijektiv. Falls* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *absolut konvergent ist, so konvergiert auch die Reihe* $\sum_{j=1}^{\infty} a_{\tau(j)}$ *absolut und hat denselben Grenzwert.*

Beweis: Setze $S = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Nach Voraussetzung gilt

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| - \sum_{k=1}^{n} |a_k| \to 0 \quad \text{mit } n \to \infty,$$

also gibt es zu $\varepsilon > 0$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| < \varepsilon/2$. Für m hinreichend groß gilt $\tau^{-1}\{1, \ldots, n\} \subset \{1, \ldots, m\}$ beziehungsweise $\{1, \ldots, n\} \subset \tau(\{1, \ldots, m\})$, und es folgt

$$\Big|S - \sum_{j=1}^{m} a_{\tau(j)}\Big| \le \Big|S - \sum_{j=1, \tau(j) \le n}^{m} a_{\tau(j)}\Big| + \sum_{j=1, \tau(j) > n}^{m} |a_{\tau(j)}| \le \underbrace{\Big|S - \sum_{k=1}^{n} a_k\Big|}_{<\varepsilon/2} + \underbrace{\sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k|}_{<\varepsilon/2}.$$

□