5 Teilmengen von $\mathbb{R}$ und von $\mathbb{R}^n$

Der $\mathbb{R}^n$ ist eine mathematische Verallgemeinerung:

$$\mathbb{R}^n = \{x = (x_1, \ldots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}\} = \underbrace{\mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}}_{n \text{ mal}}.$$

Für $x \in \mathbb{R}$ ist $|x|$ der Abstand zum Nullpunkt. Die entsprechende Verallgemeinerung im $\mathbb{R}^n$ ist die Euklidische Länge oder Norm.

Definition 5.1 *Die Euklidische Norm eines Vektors $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ist*

$$|x| = \sqrt[+]{x_1^2 + \ldots + x_n^2}.$$

Der Euklidische Abstand von zwei Punkten $x, y \in \mathbb{R}^n$ ist $|x - y|$.

Das Argument der Wurzel ist als Summe von Quadraten nichtnegativ, also ist $|x|$ wohldefiniert. Der folgende Satz fasst wesentliche Eigenschaften der Euklidischen Norm zusammen.

Satz 5.1 *Für die Euklidische Norm $|x|$ gilt:*

(1) Positivität: $|x| \geq 0$ *mit Gleichheit genau wenn* $x = 0$.

(2) Halblinearität: $|\lambda x| = |\lambda| \cdot |x|$ *für alle* $\lambda \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$.

(3) Dreiecksungleichung: $|x + y| \leq |x| + |y|$ *für alle* $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Gleichheit in der Dreiecksungleichung gilt genau wenn x und y gleichsinnig parallel sind.

Beweis: Nach Definition der Wurzel ist $|x| \geq 0$. Im Gleichheitsfall ist $x_1^2 + \ldots + x_n^2 = 0$, also $x_i = 0$ für alle $i = 1, \ldots, n$ und damit $x = 0$. Die Skalarmultiplikation im $\mathbb{R}^n$ ist komponentenweise definiert durch $\lambda(x_1, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$, also folgt

$$|\lambda x| = \left(\sum_{i=1}^n (\lambda x_i)^2\right)^{1/2} = \left(\lambda^2 \sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{1/2} = |\lambda| \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{1/2} = |\lambda| \cdot |x|.$$

Beachten Sie, dass hier das Symbol $|\cdot|$ in zwei Bedeutungen vorkommt: einmal als Betrag der reellen Zahl λ, und einmal als Euklidische Norm des Vektors $x \in \mathbb{R}^n$. Um die Dreiecksungleichung zu beweisen, holen wir etwas weiter aus und führen das Skalarprodukt ein. Vorher erklären wir noch die Bezeichnung: Für drei Punkte x, y, z ergibt sich aus der Dreiecksungleichung

$$|x - z| = |x - y + y - z| \leq |x - y| + |y - z|,$$

das heißt im Dreieck mit den Eckpunkten x, y, z ist jede Seite kürzer als die Summe der beiden anderen Seiten. Im Gleichheitsfall sind $x - y$ und $y - z$ parallel, das heißt die Punkte x, y, z liegen auf einer Geraden.

Definition 5.2 *Das Standardskalarprodukt von $x, y \in \mathbb{R}^n$ ist*

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n.$$

Offenbar gilt $\langle x, x\rangle = |x|^2$ für $x \in \mathbb{R}^n$.

Lemma 5.1 *Für das Standardskalarprodukt $\langle x, y\rangle$ gilt:*

(1) Positivität: $\langle x, x\rangle \geq 0$ *mit Gleichheit genau wenn* $x = 0$.

(2) Symmetrie: $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$ *für alle* $x, y \in \mathbb{R}^n$.

(3) Bilinearität: *Für alle* $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ *und* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ *gilt*

$$\langle \lambda x + \mu y, z\rangle = \lambda\langle x, z\rangle + \mu\langle y, z\rangle \quad \text{und} \quad \langle x, \lambda y + \mu z\rangle = \lambda\langle x, y\rangle + \mu\langle x, z\rangle.$$

Beweis: Die Positivität folgt aus der Positivität der Norm, und die Symmetrie ist offensichtlich. Auch die Bilinearität ergibt sich leicht aus der Definition:

$$\langle \lambda x + \mu y, z\rangle = \sum_{i=1}^n (\lambda x_i + \mu y_i) z_i = \lambda \sum_{i=1}^n x_i z_i + \mu \sum_{i=1}^n y_i z_i = \lambda\langle x, z\rangle + \mu\langle y, z\rangle.$$

□

Es kommt nun eine fundamentale Ungleichung:

Satz 5.2 (Ungleichung von Cauchy-Schwarz) *Für $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt*

$$|\langle x, y\rangle| \leq |x|\,|y|. \tag{5.6}$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn x und y linear abhängig sind.

Beweis: Für $a, b \in \mathbb{R}^n$ mit $|a| = |b| = 1$ gilt $|\langle a, b\rangle| \leq 1$, denn die Bilinearität ergibt

$$1 \pm \langle a, b\rangle = \frac{1}{2}\big(|a|^2 + |b|^2 \pm 2\langle a, b\rangle\big) = \frac{1}{2}|a \pm b|^2 \geq 0.$$

Ist nun $x = 0$ oder $y = 0$, so gilt $\langle x, y\rangle = |x|\,|y| = 0$. Andernfalls betrachten wir die Vektoren $a = x/|x|$ sowie $b = y/|y|$. Diese haben Länge Eins, denn nach Halblinearität der Norm gilt

$$\left|\frac{x}{|x|}\right| = \left|\frac{1}{|x|}x\right| = \frac{1}{|x|}\,|x| = 1.$$

Anwendung der gezeigten Ungleichung für a, b liefert

$$\frac{1}{|x|}\frac{1}{|y|}|\langle x, y\rangle| = \left|\frac{1}{|x|}\frac{1}{|y|}\langle x, y\rangle\right| = \left|\left\langle \frac{x}{|x|}, \frac{y}{|y|}\right\rangle\right| = |\langle a, b\rangle| \leq 1,$$

was zu zeigen war. Für $x, y \neq 0$ kann Gleichheit kann nur dann eintreten, wenn $a \pm b = 0$, also wenn x und y parallel sind. □

Damit können wir nun leicht den Beweis der Dreiecksungleichung führen:

$$|x + y|^2 = |x|^2 + 2\langle x, y\rangle + |y|^2 \leq |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 = (|x| + |y|)^2.$$

Mit der Monotonie der Wurzel folgt $|x + y| \leq |x| + |y|$ wie behauptet. Im Gleichheitsfall müssen zunächst x und y parallel sein, außerdem muss aber $\langle x, y\rangle \geq 0$ sein, also sind x, y gleichsinnig parallel.

Im Gegensatz zu $\mathbb{R}$ haben wir im $\mathbb{R}^n$ keine Anordnung zur Verfügung. Deshalb verwenden wir die Ungleichungszeichen $<, >, \leq, \geq$, Formulierungen wie "nach oben bzw. unten beschränkt" und den Begriff der Monotonie *ausschließlich* für reelle Zahlen und *niemals* für Punkte im $\mathbb{R}^n$. Eine Ungleichung $a < b$ ist nur für reelle Zahlen sinnvoll (später auch mal für gewisse Matrizen, aber das tut jetzt nichts zur Sache). Ein Check zeigt jedoch, dass die Begriffe Konvergenz, ε-Umgebung, Beschränktheit, Cauchyfolge und Vollständigkeit mit der *Betragsfunktion* formuliert werden können. Sie lassen sich dann auf den $\mathbb{R}^n$ verallgemeinern, indem wir statt der Betragsfunktion die Euklidische Norm einsetzen.

Definition 5.3 (Konvergenz im $\mathbb{R}^n$) *Die Folge $x_k \in \mathbb{R}^n$ konvergiert gegen $a \in \mathbb{R}^n$, falls gilt:*

> *Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $N \in \mathbb{R}$, so dass für alle $k > N$ gilt: $|x_k - a| < \varepsilon$.*

Definition 5.4 (ε-Umgebung in $\mathbb{R}^n$) *Die ε-Umgebung von $a \in \mathbb{R}^n$ ist die Menge*

$$B_\varepsilon(a) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - a| < \varepsilon\}.$$

Sie wird auch als offene Kugel (für $n \geq 3$) bzw. offene Kreisscheibe (für $n = 2$) um a mit Radius $\varepsilon > 0$ bezeichnet. Die abgeschlossene Kugel ist

$$K_\varepsilon(a) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - a| \leq \varepsilon\}.$$

Definition 5.5 (Beschränkte Teilmengen von $\mathbb{R}^n$) *Eine Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt beschränkt, wenn gilt:*

Es gibt ein $K \geq 0$ mit $|x| \leq K$ für alle $x \in M$.

Zum Glück müssen wir nun nicht die ganze Theorie von vorne beginnen, sondern wir können alles zurückspielen auf die Resultate für $\mathbb{R}$, indem wir die einzelnen Koordinaten der Punkte $x \in \mathbb{R}^n$ betrachten. Wesentlich dafür sind die folgenden Ungleichungen:

Lemma 5.2 *Für $x \in \mathbb{R}^n$ gilt*

$$\max_{i=1,\ldots,n} |x_i| \leq |x| \leq \sqrt{n} \max_{i=1,\ldots,n} |x_i|.$$

Beweis: Die Ungleichungen folgen mit der Monotonie der Wurzel aus

$$\big(\max_{i=1,\ldots,n} |x_i|\big)^2 \leq x_1^2 + \ldots + x_n^2 = |x|^2 \leq n\,\big(\max_{i=1,\ldots,n} |x_i|\big)^2.$$

Überlegen Sie, was die Ungleichungen geometrisch bedeuten. □

Satz 5.3 (Eigenschaften bzgl. Norm $\simeq$ Eigenschaften bzgl. der Koordinaten) *Eine Folge $x_k = \big((x_k)_1, \ldots, (x_k)_n\big) \in \mathbb{R}^n$ ist genau dann bezüglich der Euklidischen Norm konvergent (beschränkt, Cauchyfolge), wenn für alle $i = 1, \ldots, n$ die Koordinatenfolgen $\big((x_k)_i\big)_{k \in \mathbb{N}}$ konvergent (beschränkt, Cauchyfolgen) sind.*

Beweis: Für die Beschränktheit folgt die Aussage sofort aus Lemma 5.2. Das Argument für die Konvergenz geht wie folgt:

$$\begin{aligned}
x_k \to a \quad &\Leftrightarrow \quad |x_k - a| \to 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \max_{i=1,\ldots,n} \big|(x_k)_i - a_i\big| \to 0 \quad \text{(wegen Lemma (5.2))} \\
&\Leftrightarrow \quad |(x_k)_i - a_i| \to 0 \qquad \text{für alle } i = 1, \ldots, n \\
&\Leftrightarrow \quad (x_k)_i \to a_i \qquad \text{für alle } i = 1, \ldots, n.
\end{aligned}$$

Sind schließlich die einzelnen $\big((x_k)_i\big)_{k\in\mathbb{N}}$ Cauchyfolgen, so gibt es zu $\varepsilon > 0$ Zahlen $N_i \in \mathbb{R}$ mit $|(x_k)_i - (x_l)_i| < \varepsilon/\sqrt{n}$ für alle $k, l > N_i$. Es folgt für $k, l > \max_{i=1,\dots,n} N_i$ mit Lemma 5.2

$$|x_k - x_l| \le \sqrt{n} \max_{i=1,\dots,n} |(x_k)_i - (x_l)_i| < \sqrt{n}\,\varepsilon/\sqrt{n} = \varepsilon.$$

Die umgekehrte Richtung ist den Lesern überlassen. □

Folgerung 5.1 *Mit der Euklidischen Norm ist $\mathbb{R}^n$ vollständig: zu jeder Cauchyfolge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ gibt es ein $a \in \mathbb{R}^n$, so dass $x_k \to a$ mit $k \to \infty$.*

Beweis: Nach Satz 5.3 sind die Folgen $\big((x_k)_i\big)_{k\in\mathbb{N}}$ Cauchyfolgen in $\mathbb{R}$. Nach dem Vollständigkeitsaxiom gibt es $a_i \in \mathbb{R}$ mit $\lim_{k\to\infty}(x_k)_i = a_i$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$. Wieder nach Satz 5.3 folgt $\lim_{k\to\infty} x_k = a$. □

Beispiel 5.1 Um die Problematik der nächsten Folgerung zu verdeutlichen, betrachten wir hier die Folge $x_k = \big((x_k)_1, (x_k)_2\big)$ von Punkten in $\mathbb{R}^2$ mit

$$(x_k)_1 = \begin{cases} 1 \text{ für } k \text{ gerade,} \\ -1 \text{ für } k \text{ ungerade,} \end{cases} \qquad (x_k)_2 = \begin{cases} 0 \text{ für } k = 0 \bmod 3, \\ 1 \text{ für } k = 1 \bmod 3, \\ 2 \text{ für } k = 2 \bmod 3. \end{cases}$$

Wir wollen eine konvergente Teilfolge finden. Die Koordinatenfolge $\big((x_k)_1\big)_{k\in\mathbb{N}}$ hat die konstante Teilfolge $(x_{2j})_1 = 1$ für $j \in \mathbb{N}$, und die Koordinatenfolge $\big((x_k)_2\big)_{k\in\mathbb{N}}$ hat die konstante Teilfolge $(x_{3j})_2 = 0$ für $j \in \mathbb{N}$. Damit haben wir aber noch *keine* konvergente Teilfolge für die Punkte $x_k \in \mathbb{R}^2$ gefunden, denn weder $(x_{2j})_2$ noch $(x_{3j})_1$ sind konvergent. Stattdessen wählen wir aus der Folge $(x_{2j})_{j\in\mathbb{N}}$ die *weitere* Teilfolge $(x_{2\cdot 3i})_{i\in\mathbb{N}}$, also $j = 3i$, aus. Diese konvergiert in $\mathbb{R}^2$, denn es ist sogar $x_{6i} = (1, 0)$ für alle $i \in \mathbb{N}$.

Folgerung 5.2 (Bolzano-Weierstraß im $\mathbb{R}^n$) *Jede beschränkte Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}^n$ besitzt eine konvergente Teilfolge.*

Beweis: Wir konstruieren sukzessive Teilfolgen, so dass schliesslich alle n Koordinatenfolgen konvergieren. Aus Satz 5.3 folgt dann die Behauptung. Angenommen, für ein $j \in \{1, \dots, n\}$ sei schon eine Teilfolge $k_1 < k_2 < \dots$ gefunden, so dass

$$\lim_{l\to\infty} (x_{k_l})_i = a_i \qquad \text{für alle } i = 1, \dots, j-1.$$

Der Fall $j = 1$ ist dabei der Induktionsanfang. Da die Folge $(x_{k_l})_j$, $l \in \mathbb{N}$, beschränkt ist nach Satz 5.3, gibt es nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß in $\mathbb{R}$, Satz 2.8, eine Teilfolge $l_1 < l_2 < \dots$ und ein $a_j \in \mathbb{R}$, so dass zusätzlich

$$\lim_{m\to\infty} (x_{k_{l_m}})_j = a_j.$$

Nach dem n-ten Schritt ist eine Teilfolge bestimmt, für die alle Koordinatenfolgen konvergieren. □

Definition 5.6 (Häufungspunkt von Mengen) *Ein Punkt $a \in \mathbb{R}^n$ heißt Häufungspunkt der Menge $M \subset \mathbb{R}^n$, falls für jedes $\varepsilon > 0$ die Menge $B_\varepsilon(a) \cap M$ unendlich viele Elemente hat.*

Ein Häufungspunkt von M ist nicht notwendig Element von M, zum Beispiel ist $0 \in \mathbb{R}$ Häufungspunkt von $M = \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$.

Lemma 5.3 *Ein Punkt $a \in \mathbb{R}^n$ ist genau dann Häufungspunkt der Menge M, wenn es eine Folge von Punkten $x_k \in M\backslash\{a\}$ gibt mit $\lim_{k\to\infty} x_k = a$.*

BEWEIS: Sei a Häufungspunkt gemäß Definition 5.6. Zu $\varepsilon_k = 1/k$ gibt es dann ein $x_k \in B_{1/k}(a) \cap M\backslash\{a\}$. Die Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist wie verlangt.

Sei umgekehrt eine Folge $x_k \in M\backslash\{a\}$ gegeben mit $\lim_{k\to\infty} x_k = a$. Angenommen, für ein $\varepsilon > 0$ ist die Menge $B_\varepsilon(a) \cap M$ endlich, also $B_\varepsilon(a) \cap M\backslash\{a\} = \{a_1, \ldots, a_m\}$ für ein $m \in \mathbb{N}_0$. Dann ist $\varrho := \min_{1\le i\le m} |a_i - a| > 0$. Wegen $\lim_{k\to\infty} |x_k - a| = 0$ folgt für k hinreichend groß

$$x_k \in B_\varrho(a) \cap M\backslash\{a\} = \emptyset,$$

ein Widerspruch. □

Beispiel 5.2 Die Menge $M = \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$ hat $0 \in \mathbb{R}$ als einzigen Häufungspunkt. Dagegen ist die Menge der Häufungspunkte von $\mathbb{Q}$ gleich $\mathbb{R}$, denn in jeder Umgebung einer reellen Zahl gibt es eine rationale Zahl, siehe Satz 2.8. Es gibt eine kleine Differenz zwischen dem Begriff des Häufungspunkts für Folgen und für Mengen: die konstante Folge $x_k = a$, $k \in \mathbb{N}$, hat den Häufungspunkt a, dagegen hat die einelementige Menge $\{a\} \subset \mathbb{R}^n$ keinen Häufungspunkt. Überlegen Sie, dass für eine beliebige Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ im $\mathbb{R}^n$ die Häufungspunkte des Wertebereichs $M = \{x_k : k \in \mathbb{N}\}$ eine Teilmenge der Häufungspunkte der Folge bilden, die aber eine echte Teilmenge sein kann, wie das Beispiel der konstanten Folge zeigt.

Definition 5.7 *Eine Menge*

(i) *$U \subset \mathbb{R}^n$ heißt offen, falls es zu jedem $a \in U$ ein $\varepsilon > 0$ gibt mit $B_\varepsilon(a) \subset U$,*

(ii) *$A \subset \mathbb{R}^n$ heißt abgeschlossen, wenn folgende Implikation stets gilt:*

$$a = \lim_{n\to\infty} x_n \text{ mit } x_n \in A \quad \Rightarrow \quad a \in A.$$

Nach Lemma 5.3 ist eine Menge A genau dann abgeschlossen, wenn jeder Häufungspunkt von A schon Element von A ist.

Beispiel 5.3 Die Kugel $B_\varrho(a) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - a| < \varrho\}$ ist offen. Denn sei $x \in B_\varrho(a)$. Für $\varepsilon := \varrho - |x - a| > 0$ und $y \in B_\varepsilon(x)$ folgt aus der Dreiecksungleichung

$$|y - a| \le |y - x| + |x - a| < \varepsilon + |x - a| = \varrho.$$

Also gilt $B_\varepsilon(x) \subset B_\varrho(a)$, das heißt $B_\varrho(a)$ ist offen. Die Kugel $K_\varrho(a) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - a| \le \varrho\}$ ist dagegen abgeschlossen: ist $x_k \in K_\varrho(a)$ und $x_k \to x \in \mathbb{R}^n$, so folgt

$$|x - a|^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - a_i)^2 = \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^n \big((x_k)_i - a_i\big)^2 \le \varrho^2,$$

das heißt $x \in K_\varrho(a)$.

Satz 5.4 *Eine Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann offen, wenn $\mathbb{R}^n\backslash M$ abgeschlossen ist.*

Beweis: Sei M offen und $x_k \in \mathbb{R}^n \backslash M$ mit $\lim_{k\to\infty} x_k = a \in \mathbb{R}^n$. Wäre $a \in M$, so folgt $B_\varepsilon(a) \subset M$ für ein $\varepsilon > 0$, und somit $x_k \in M$ für hinreichend große k, ein Widerspruch. Also ist $a \in \mathbb{R}^n \backslash M$, das heißt $\mathbb{R}^n \backslash M$ ist abgeschlossen.

Sei nun $\mathbb{R}^n \backslash M$ abgeschlossen. Wäre M nicht offen, so gibt es ein $a \in M$ mit $B_\varepsilon(a) \backslash M \neq \emptyset$ für alle $\varepsilon > 0$. Finde induktiv $x_k \in B_{1/k}(a)$ mit $x_k \in \mathbb{R}^n \backslash M$. Es folgt $a = \lim_{k\to\infty} x_k \in \mathbb{R}^n \backslash M$, ein Widerspruch. □

Satz 5.5 *Die offenen Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ bilden eine Topologie, das heißt es gelten folgende Aussagen:*

(1) *$\emptyset$ und $\mathbb{R}^n$ sind offen.*

(2) *Jede Vereinigung $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ von offenen Mengen $U_\lambda \subset \mathbb{R}^n$ ist offen.*

(3) *Der Durchschnitt $\bigcap_{i=1}^k U_i$ von endlich vielen offenen Mengen $U_i \subset \mathbb{R}^n$ ist offen.*

Beweis: Aussage (1) ist evident. Ist $x \in \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$, so gilt $x \in U_\mu$ für ein $\mu \in \Lambda$. Da U_μ offen, gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(x) \subset U_\mu \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$, was zu zeigen war.

Sei nun $x \in \bigcap_{i=1}^k U_i$ wie in (3). Da U_i offen, gibt es ein $\varepsilon_i > 0$ mit $B_{\varepsilon_i}(x) \subset U_i$ für $i = 1, \ldots, k$. Es folgt $\varepsilon := \min_{i=1,\ldots,k} \varepsilon_i > 0$ und $B_\varepsilon(x) \subset B_{\varepsilon_i}(x) \subset U_i$ für alle $i = 1, \ldots, k$, also $B_\varepsilon(x) \subset \bigcap_{i=1}^k U_i$. □

Wir betonen, dass im Gegensatz zur Vereinigung der Durchschnitt von unendlich vielen offenen Mengen in der Regel nicht offen ist, zum Beispiel gilt

$$\{a\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_{1/n}(a).$$

Eine Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ muss weder offen noch abgeschlossen sein; dies trifft zum Beispiel auf ein halboffenes Intervall $[a, b)$ zu. Die Mengen $\mathbb{R}$ und $\emptyset$ sind die einzigen Teilmengen von $\mathbb{R}$, die sowohl offen als auch abgeschlossen sind. Dies soll in den Übungen gezeigt werden. Durch Übergang zu den Komplementen sieht man, dass beleibige Durchschnitte und endliche Vereinigungen von abgeschlossenen Mengen abermals abgeschlossen sind.