

# Kapitel 2

## Stetige Funktionen

### 1 Grenzwerte und Stetigkeit

Eine Funktion auf einer Menge  $D \subset \mathbb{R}^n$  mit Werten in  $\mathbb{R}^m$  ist bekanntlich eine Abbildung

$$f : D \rightarrow \mathbb{R}^m, x \mapsto f(x).$$

Im Fall  $m = 1$ , also  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ , heißt die Funktion reellwertig.  $D$  heißt Definitionsbereich und  $f(D)$  heißt Bild von  $f$ . Der Graph von  $f$  ist die Menge

$$\text{Graph}(f) = \{(x, f(x)) : x \in D\} \subset D \times \mathbb{R}^m \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m.$$

**Beispiel 1.1** *i) Konstante Funktionen. Sei  $c \in \mathbb{R}$  vorgegeben.*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto c \end{aligned}$$

*ii) Identitische Abbildung*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x \end{aligned}$$

**Beispiel 1.2** Die Signumfunktion ist definiert durch

$$\text{sign} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \text{sign}(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x > 0, \\ 0 & \text{für } x = 0, \\ -1 & \text{für } x < 0. \end{cases}$$

**Beispiel 1.3** Die Gaußklammerfunktion oder Größte-Ganze-Funktion ist gegeben durch

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = [x] = \max \{n \in \mathbb{N} : n \leq x\}.$$

**Beispiel 1.4** Ist  $I \subset \mathbb{R}$  ein Intervall, so bezeichnet man Funktionen  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^m$  auch als (parametrisierte) Kurven (*curva*). Oft wird die unabhängige Variable mit  $t \in I$  (statt  $x \in I$ ) bezeichnet. Diese Notation folgt Newton, der sich für Bahnkurven von Massenpunkten in Abhängigkeit von der Zeit (*tempus*) interessiert hat und  $c(t) = (x(t), y(t), z(t))$  schreibt. Ein explizites Beispiel ist der horizontale Wurf aus der Höhe  $h$  mit Geschwindigkeit  $v$ :

$$c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, c(t) = (vt, 0, h - gt^2/2) \quad (g = \text{Erdbeschleunigung}).$$

**Beispiel 1.5** Die charakteristische Funktion (Indikatorfunktion) einer Menge  $E \subset \mathbb{R}^n$  ist

$$\chi_E : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \chi_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in E, \\ 0 & \text{für } x \notin E. \end{cases}$$

**Beispiel 1.6** Die Euklidische Norm auf  $\mathbb{R}^n$  ist die Funktion

$$|\cdot| : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto |x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}.$$

In  $\mathbb{R}$  sowie in  $\mathbb{C}$  sprechen wir auch von der Betragsfunktion.

**Beispiel 1.7** Die Abstandsfunktion einer Menge  $E \subset \mathbb{R}^n$  ist

$$\text{dist}_E : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \text{dist}_E(x) = \inf\{|y - x| : y \in E\}.$$

**Definition 1.1 (Stetigkeit)** Die Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$  heißt stetig im Punkt  $x_0 \in D$ , falls es zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  gibt, so dass gilt:

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \text{für alle } x \in D \text{ mit } |x - x_0| < \delta. \quad (1.1)$$

$f$  heißt stetig, falls  $f$  in allen  $x_0 \in D$  stetig ist.

Mithilfe von Umgebungen lässt sich die Stetigkeit in  $x_0$  auch so fassen:

$$\text{Für alle } \varepsilon > 0 \text{ gibt es ein } \delta > 0 \text{ mit } f(D \cap B_\delta(x_0)) \subset B_\varepsilon(f(x_0)).$$

Wir wollen einige Beispiele betrachten.

**Beispiel 1.8** Konstante Funktionen sind stetig: sei  $f(x) = c$  für alle  $x \in D$  und ein  $c \in \mathbb{R}^m$ . Dann folgt

$$|f(x) - f(x_0)| = 0 \quad \text{für alle } x \in D,$$

also können wir zu gegebenem  $\varepsilon > 0$  jedes  $\delta > 0$  wählen.

**Beispiel 1.9** Affin-lineare Funktionen  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sind stetig: sei  $f(x) = ax + b$  mit  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq 0$ . Dann gilt

$$|f(x) - f(x_0)| = |(ax + b) - (ax_0 + b)| = |a| |x - x_0|,$$

das heißt wir können  $\delta = \varepsilon/|a|$  wählen.

**Beispiel 1.10** Die Euklidische Norm  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = |x|$ , ist ebenfalls stetig auf ganz  $\mathbb{R}^n$ , denn aus der Dreiecksungleichung folgt

$$|f(x) - f(x_0)| = ||x| - |x_0|| \leq |x - x_0|.$$

Wir können also  $\delta = \varepsilon$  nehmen.

**Beispiel 1.11** Die charakteristische Funktion von  $\mathbb{Q}$  (oder Dirichlet-Funktion)

$$\chi_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

ist nirgends stetig. Denn wäre  $\chi_{\mathbb{Q}}$  stetig in  $x_0 \in \mathbb{R}$ , so gibt es zu  $\varepsilon = 1$  ein  $\delta > 0$  mit

$$|\chi_{\mathbb{Q}}(x) - \chi_{\mathbb{Q}}(x_0)| < \varepsilon \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R} \text{ mit } |x - x_0| < \delta.$$

Ist  $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ , so können wir  $x \in \mathbb{Q}$  wählen, da  $\mathbb{Q}$  dicht in  $\mathbb{R}$  ist nach Satz 1.8, und erhalten  $1 = |\chi_{\mathbb{Q}}(x) - \chi_{\mathbb{Q}}(x_0)| < \varepsilon = 1$ , ein Widerspruch. Ist  $x_0 \in \mathbb{Q}$ , so können wir analog argumentieren, da  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  ebenfalls dicht ist nach Aufgabe 1, Serie 6.

Ein sehr nützliches, hinreichendes Kriterium für die Stetigkeit ist das folgende.

**Definition 1.2**  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$  heißt *Lipschitzstetig mit Konstante*  $L \in [0, \infty)$ , falls gilt:

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \quad \text{für alle } x, y \in D.$$

Die Euklidische Norm ist Lipschitzstetig mit Konstante  $L = 1$ , vgl. Beispiel 1.10.

**Lemma 1.1** Jede Lipschitzstetige Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$  ist stetig.

BEWEIS: Sei  $f$  Lipschitzstetig mit Konstante  $L > 0$ . Zu  $x_0 \in D$  und gegebenem  $\varepsilon > 0$  wählen wir  $\delta = \varepsilon/L > 0$ , und erhalten für  $|x - x_0| < \delta$

$$|f(x) - f(x_0)| \leq L|x - x_0| < L\delta = \varepsilon.$$

□

**Beispiel 1.12** Die Abstandsfunktion  $\text{dist}_E : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  einer Menge  $E \subset \mathbb{R}^n$  ist Lipschitzstetig mit Konstante Eins. Denn es gilt nach der Dreiecksungleichung

$$|y - x_2| \leq |y - x_1| + |x_1 - x_2| \quad \text{für alle } x_{1,2} \in \mathbb{R}^n, y \in E.$$

Bilden wir auf beiden Seiten das Infimum über alle  $y \in E$ , so folgt

$$\text{dist}_E(x_2) \leq \text{dist}_E(x_1) + |x_1 - x_2|.$$

Durch Vertauschen von  $x_1$  mit  $x_2$  ergibt sich

$$|\text{dist}_E(x_1) - \text{dist}_E(x_2)| \leq |x_1 - x_2|.$$

**Beispiel 1.13** Lineare Abbildungen  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  sind Lipschitzstetig. Um dies zu zeigen, verwenden wir die Matrixdarstellung bezüglich der Standardbasen. Es gilt für  $x \in \mathbb{R}^n$

$$A(x)_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \quad \text{wobei } A(x) = \sum_{i=1}^m A(x)_i e_i.$$

Die Euklidische Norm der Matrix  $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$  ist

$$|A| = \left( \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}^2 \right)^{1/2}.$$

Mit der Ungleichung von Cauchy-Schwarz folgt

$$|A(x)|^2 = \sum_{i=1}^m \left( \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right)^2 \leq \sum_{i=1}^m \left( \sum_{j=1}^n a_{ij}^2 \right) \cdot \left( \sum_{j=1}^n x_j^2 \right) = |A|^2 |x|^2,$$

das heißt es gilt die Abschätzung

$$|A(x)| \leq |A| |x| \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n.$$

Insbesondere folgt für  $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$|A(x) - A(y)| = |A(x - y)| \leq |A| |x - y|,$$

d. h.  $A$  ist Lipschitzstetig mit Konstante  $|A|$ .

**Satz 1.1 (Folgenkriterium der Stetigkeit)** Für  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$  und  $x_0 \in D$  sind folgende Aussagen äquivalent:

- (1)  $f$  ist stetig in  $x_0$ .
- (2) Für jede Folge  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  mit  $x_k \in D$  und  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x_0$  gilt:  $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = f(x_0)$ .

BEWEIS: Für die Implikation (1)  $\Rightarrow$  (2) sei  $x_k \in D$  mit  $x_k \rightarrow x_0$  für  $k \rightarrow \infty$ . Wähle zu  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  mit  $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$  für alle  $x \in D$  mit  $|x - x_0| < \delta$ . Es gibt ein  $N \in \mathbb{R}$  mit  $|x_k - x_0| < \delta$  für  $k > N$ , also folgt  $|f(x_k) - f(x_0)| < \varepsilon$  für  $k > N$ .

Wir überlegen nun was es bedeutet, wenn  $f$  nicht stetig in  $x_0$  ist. Es gibt dann ein  $\varepsilon > 0$ , so dass (1.1) für kein  $\delta > 0$  erfüllt ist. Wählen wir  $\delta_k = 1/k$  für  $k = 1, 2, \dots$ , so gibt es  $x_k \in D$  mit  $|x_k - x_0| < 1/k$ , aber  $|f(x_k) - f(x_0)| \geq \varepsilon$ . Dies zeigt indirekt die Implikation (2)  $\Rightarrow$  (1), womit der Satz bewiesen ist.  $\square$

**Lemma 1.2** Eine Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$  ist genau dann stetig in  $x_0 \in D$ , wenn jede Koordinatenfunktion  $f_i : D \rightarrow \mathbb{R}$  in  $x_0$  stetig ist.

BEWEIS: Mit dem vorangegangenen Satz folgt dies aus der Äquivalenz von Konvergenz und Konvergenz der Koordinatenfolgen im  $\mathbb{R}^m$ , siehe Satz 3.6.  $\square$

**Lemma 1.3** Sei  $g : D \rightarrow \mathbb{R}$  stetig in  $x_0$  mit  $g(x_0) \neq 0$ . Dann gibt es ein  $\delta > 0$  mit

$$|g(x)| \geq |g(x_0)|/2 > 0 \quad \text{für alle } x \in D \cap U_\delta(x_0).$$

BEWEIS: Zu  $\varepsilon = |g(x_0)|/2 > 0$  gibt es aufgrund der Stetigkeit ein  $\delta > 0$  mit  $|g(x) - g(x_0)| < \varepsilon$  für alle  $x \in D \cap U_\delta(x_0)$ , also folgt mit der Dreiecksungleichung für diese  $x$

$$|g(x)| = |g(x_0) - (g(x_0) - g(x))| \geq |g(x_0)| - |g(x) - g(x_0)| \geq 2\varepsilon - \varepsilon = \varepsilon.$$

$\square$

**Satz 1.2 (Stetigkeitsregeln)** Seien  $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$  stetig in  $x_0 \in D$ . Dann gilt:

- (1) Für beliebige  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  ist die Funktion  $\alpha f + \beta g$  stetig in  $x_0$ .

(2) Die Funktion  $fg$  ist stetig in  $x_0$ .

(3) Ist  $g(x_0) \neq 0$ , so ist die Funktion  $f/g : D \cap U_\delta(x_0) \rightarrow \mathbb{R}$  für  $\delta > 0$  hinreichend klein definiert und stetig in  $x_0$ .

BEWEIS: Die Funktionen sind grundsätzlich punktweise erklärt, das heißt für alle  $x \in D$  gilt

$$(\alpha f + \beta g)(x) = \alpha f(x) + \beta g(x), (fg)(x) = f(x)g(x) \text{ und } (f/g)(x) = f(x)/g(x).$$

Wir führen die Aussagen auf die entsprechenden Konvergenzregeln für Folgen zurück: sei  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine beliebige Folge mit  $x_n \in D$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ . Nach Satz 1.1 gilt  $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$  und  $g(x_n) \rightarrow g(x_0)$  mit  $n \rightarrow \infty$ . Aus Kapitel I, Satz 1.3 folgt

$$\alpha f(x_n) + \beta g(x_n) \rightarrow \alpha f(x_0) + \beta g(x_0) \quad \text{ sowie } \quad f(x_n)g(x_n) \rightarrow f(x_0)g(x_0).$$

Mit Satz 1.1 ergeben sich die Behauptungen (1) und (2). In der Situation von (3) gibt es nach Lemma 1.3 ein  $\delta > 0$  mit  $g(x) \neq 0$  auf  $D \cap U_\delta(x_0)$ , so dass  $f/g$  dort definiert ist. Weiter folgt  $f(x_n)/g(x_n) \rightarrow f(x_0)/g(x_0)$ , und mit Satz 1.1 ist auch  $f/g$  stetig in  $x_0$ .  $\square$

**Folgerung 1.1** Die Menge  $C^0(D)$  der stetigen Funktionen auf  $D \subset \mathbb{R}^n$  ist ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum. Allgemeiner ist die Menge  $C^0(D, \mathbb{R}^k)$  der stetigen Abbildungen  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^k$  ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum.

BEWEIS: Das ist offensichtlich nach Satz 1.2(1) und Lemma 1.2.  $\square$

**Satz 1.3 (Verkettung stetiger Funktionen)** Seien  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $g : E \rightarrow \mathbb{R}^k$  mit  $f(D) \subset E \subset \mathbb{R}^m$ . Ist  $f$  stetig in  $x_0$  und  $g$  stetig in  $y_0 = f(x_0)$ , so ist  $g \circ f : D \rightarrow \mathbb{R}^k$  stetig in  $x_0$ .

BEWEIS: Wir verwenden wieder Satz 1.1. Ist  $x_n \in D$  eine beliebige Folge mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ , so folgt  $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$  aus der Stetigkeit von  $f$  in  $x_0$ , und weiter  $g(f(x_n)) \rightarrow g(f(x_0))$  wegen der Stetigkeit von  $g$  in  $y_0 = f(x_0)$ . Nach Satz 1.1 ist damit die Stetigkeit von  $g \circ f$  in  $x_0$  schon gezeigt.  $\square$

**Beispiel 1.14** Seien  $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Dann ist auch die Funktion  $|f| : D \rightarrow \mathbb{R}$  stetig, und ebenso die Funktionen  $\max(f, g) = (f+g+|f-g|)/2$  und  $\min(f, g) = (f+g-|f-g|)/2$ .

Schließlich wollen wir in diesem Abschnitt noch den Grenzwertbegriff für Funktionen diskutieren; allerdings fassen wir uns dabei kurz, weil die Angelegenheit für Folgen ja ausführlich behandelt wurde.

**Definition 1.3 (Grenzwert für Funktionen)** Sei  $D \subset \mathbb{R}^n$  und  $x_0$  ein Häufungspunkt von  $D$ . Die Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$  konvergiert für  $x \rightarrow x_0$  gegen  $a \in \mathbb{R}^m$ , falls es zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  gibt, so dass gilt:

$$|f(x) - a| < \varepsilon \quad \text{für alle } x \in D \text{ mit } 0 < |x - x_0| < \delta.$$

Notation:  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$  oder  $f(x) \rightarrow a$  für  $x \rightarrow x_0$ .

Für die Existenz und den Wert von  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  ist es egal, ob die Funktion in  $x_0$  definiert ist bzw. welchen Funktionswert sie dort hat. Die Beziehung zwischen Grenzwert und Stetigkeit ist wie folgt:

**Lemma 1.4 (Stetigkeit und Grenzwert)** Sei  $x_0 \in D$  ein Häufungspunkt von  $D$ . Für die Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$  sind folgende Aussagen äquivalent:

- (1)  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ .
- (2)  $f$  ist stetig in  $x_0$ .

BEWEIS: Das folgt direkt aus den gegebenen Definitionen. □

Für reellwertige Funktionen können wir den Konvergenzbegriff ausdehnen, indem wir (uneigentliche) Konvergenz gegen  $\pm\infty$  zulassen.

**Definition 1.4 (Uneigentlicher Grenzwert)** Sei  $x_0 \in \mathbb{R}$  ein Häufungspunkt von  $D$ , und  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ . Dann gilt  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ , wenn es zu jedem  $K > 0$  ein  $\delta > 0$  gibt mit

$$f(x) > K \text{ für alle } x \in D \text{ mit } 0 < |x - x_0| < \delta.$$

Entsprechend wird  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$  erklärt.

Im Fall  $D \subset \mathbb{R}$  besteht die Möglichkeit, Grenzwerte von  $f(x)$  für  $x \rightarrow \pm\infty$  zu betrachten.

**Definition 1.5 (Grenzwert bei  $\pm\infty$ )** Sei  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$  mit  $D \subset \mathbb{R}$  nicht nach oben beschränkt. Dann gilt  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a \in \mathbb{R}^m$ , wenn es zu  $\varepsilon > 0$  ein  $K \in \mathbb{R}$  gibt mit

$$|f(x) - a| < \varepsilon \text{ für alle } x \in D \text{ mit } x > K.$$

Analog wird der Grenzwert für  $x \rightarrow -\infty$  erklärt.

Sowohl bei der Stetigkeit als auch beim Grenzwert spielt der zugrundeliegende Definitionsbereich eine Rolle. Wir schreiben  $\lim_{x \rightarrow x_0, x \in D} f(x)$ , wenn wir den gewählten Definitionsbereich hervorheben möchten. In  $\mathbb{R}$  werden oft einseitige Grenzwerte gebraucht:

$$\lim_{x \searrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0, x > x_0} f(x) \quad \text{und} \quad \lim_{x \nearrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0, x < x_0} f(x).$$

Zum Beispiel ist  $\lim_{x \searrow 0} \text{sign}(x) = +1$  und  $\lim_{x \nearrow 0} \text{sign}(x) = -1$ , während der Grenzwert  $\lim_{x \rightarrow 0} \text{sign}(x)$  nicht existiert. Wir formulieren jetzt die wichtigsten Regeln für Grenzwerte von Funktionen. Diese sind für Folgen bzw. aus der Diskussion der Stetigkeit schon bekannt, deshalb verzichten wir auf die Beweise und formulieren die Aussagen der Einfachheit halber nur für  $n = m = 1$ , also reellwertige Funktionen einer Variablen.

**Satz 1.4 (Rechenregeln für Grenzwerte)** Es gelten folgende Aussagen:

- (1) Seien  $a, b \in \mathbb{R}$  und  $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ . Aus  $f(x) \rightarrow a$ ,  $g(x) \rightarrow b$  für  $x \rightarrow x_0$  folgt

$$\begin{aligned} \alpha f(x) + \beta g(x) &\rightarrow \alpha a + \beta b \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R}), \\ f(x)g(x) &\rightarrow ab, \\ f(x)/g(x) &\rightarrow a/b, \quad \text{falls } b \neq 0. \end{aligned}$$

- (2) Seien  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g : E \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(D) \subset E$ . Gilt  $f(x) \rightarrow y_0$  mit  $x \rightarrow x_0$  und ist  $g$  stetig in  $y_0$ , so folgt  $(g \circ f)(x) \rightarrow g(y_0)$  mit  $x \rightarrow x_0$ .
- (3) Sei  $f(x) \rightarrow a$ ,  $g(x) \rightarrow b$  für  $x \rightarrow x_0$ . Ist  $f(x) \leq g(x)$  für  $0 < |x - x_0| < \delta$ , so folgt  $a \leq b$ .
- (4) Ist  $f > 0$  auf  $D$ , so ist  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$  äquivalent zu  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$ .

**Beispiel 1.15 (Rationale Funktionen)** Seien  $p, q$  reelle Polynome vom Grad  $m$  bzw.  $n$ , also  $p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_mx^m$  bzw.  $q(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n$  mit  $a_i, b_j \in \mathbb{R}$  und  $a_m, b_n \neq 0$ . Setze  $N = \{x \in \mathbb{R} : q(x) = 0\}$  und definiere

$$f : \mathbb{R} \setminus N \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}.$$

Wann hat  $f$  eine stetige Fortsetzung bei  $x_0 \in N$ ? Sei dazu  $x_0$  eine  $\nu$ -fache Nullstelle von  $q$  mit  $\nu \geq 1$ , und eine  $\mu$ -fache Nullstelle von  $p$ , evtl.  $\mu = 0$  falls  $p(x_0) \neq 0$ . Also gilt

$$p(x) = (x - x_0)^\mu \tilde{p}(x) \quad \text{bzw.} \quad q(x) = (x - x_0)^\nu \tilde{q}(x)$$

für Polynome  $\tilde{p}, \tilde{q}$  mit  $\tilde{p}(x_0), \tilde{q}(x_0) \neq 0$ . Es folgt

$$f(x) = (x - x_0)^{\mu - \nu} \frac{\tilde{p}(x)}{\tilde{q}(x)} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R} \setminus N,$$

und wir erhalten aus den Rechenregeln für Grenzwerte  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$  im Fall  $\mu > \nu$  und  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \tilde{p}(x_0)/\tilde{q}(x_0) \neq 0$  im Fall  $\mu = \nu$ . In diesen Fällen ist die Funktion stetig fortsetzbar nach Lemma 1.4, dagegen hat  $f$  im Fall  $\mu < \nu$  in  $x_0$  eine Polstelle. Sei zum Beispiel  $\tilde{p}(x_0)/\tilde{q}(x_0) > 0$ , dann ergibt sich für die einseitigen Grenzwerte bei  $x_0$

|                      |                  |                  |
|----------------------|------------------|------------------|
|                      | $x \searrow x_0$ | $x \nearrow x_0$ |
| $\nu - \mu$ gerade   | $+\infty$        | $+\infty$        |
| $\nu - \mu$ ungerade | $+\infty$        | $-\infty$        |

Das Verhalten von  $f$  für  $x \rightarrow \pm\infty$  wurde bereits in Kapitel 1, Beispiel 1.7 untersucht.

## 2 Zwischenwertsatz und klassische Funktionen

In diesem Abschnitt haben wir es mit Funktionen zu tun, die auf einem Intervall definiert sind. Eine Menge  $I \subset \mathbb{R}$  ist genau dann ein Intervall, wenn  $(a, b) \subset I$  mit  $a = \inf I$  und  $b = \sup I$ . Hier sind also unendliche Intervallgrenzen zugelassen, aber das Intervall soll stets Teilmenge von  $\mathbb{R}$  sein, das heißt unendliche Intervallgrenzen sind offen. Der Durchschnitt von zwei Intervallen  $I_{1,2}$  mit den Grenzen  $a_{1,2}$  und  $b_{1,2}$  ist wieder ein Intervall mit Grenzen  $a = \max(a_1, a_2)$  und  $b = \min(b_1, b_2)$ . Nach unserer Definition ist die leere Menge auch ein Intervall.

**Satz 2.1 (Zwischenwertsatz)** Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Dann gibt es zu jedem  $y_0$  zwischen  $f(a)$  und  $f(b)$  ein  $x_0 \in [a, b]$  mit  $f(x_0) = y_0$ .

*Bemerkung.* Die Gleichung  $f(x) = y_0$  kann mehrere Lösungen in  $[a, b]$  besitzen, das heißt  $x_0$  ist im allgemeinen nicht eindeutig bestimmt.

BEWEIS: Sei oBdA  $f(a) \leq y_0 \leq f(b)$ . Dann ist die Menge  $M = \{x \in [a, b] : f(x) \leq y_0\}$  nichtleer, da  $a \in M$ . Wir behaupten  $f(x_0) = y_0$  für  $x_0 = \sup M$ . Für  $n \in \mathbb{N}$  ist  $x_0 - 1/n$  keine obere Schranke von  $M$ , also gibt es  $x_n \in M$  mit  $x_0 - 1/n < x_n \leq x_0$ . Da  $f$  stetig, folgt  $f(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \leq y_0$ . Andererseits ist  $x_0$  obere Schranke von  $M$ , also gilt  $f(x) > y_0$  für  $x_0 < x \leq b$ . Ist  $x_0 < b$ , so folgt  $f(x_0) = \lim_{x \searrow x_0} f(x) \geq y_0$ . Im Fall  $x_0 = b$  gilt  $f(x_0) \geq y_0$  sowieso nach Voraussetzung.  $\square$

**Folgerung 2.1** Sei  $I \subset \mathbb{R}$  ein Intervall und  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Dann ist  $f(I)$  ein Intervall mit Endpunkten  $\alpha = \inf_{x \in I} f(x)$  und  $\beta = \sup_{x \in I} f(x)$ .

BEWEIS: Zu  $y \in (\alpha, \beta)$  gibt es  $x_1, x_2 \in I$  mit  $f(x_1) < y < f(x_2)$ . Dann gibt es nach Satz 2.1 ein  $x \in [x_1, x_2]$  (bzw.  $x \in [x_2, x_1]$ ) mit  $f(x) = y$ . Es folgt  $(\alpha, \beta) \subset f(I)$ .  $\square$

Jede streng monotone Funktion  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  ist injektiv und hat damit eine Umkehrfunktion  $g : f(I) \rightarrow \mathbb{R}$ . Es stellt sich die Frage nach der Stetigkeit von  $g$ . Zum nächsten Lemma vgl. das entsprechende Resultat für Folgen, Satz 2.5 in Kapitel 1.

**Lemma 2.1 (Einseitige Grenzwerte monotoner Funktionen)** Sei  $f : I = (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  monoton wachsend. Dann gilt

$$\lim_{x \searrow a} f(x) = \inf\{f(x) : x \in I\} \quad \text{und} \quad \lim_{x \nearrow b} f(x) = \sup\{f(x) : x \in I\}.$$

BEWEIS: Mit  $\alpha = \inf\{f(x) : x \in I\} \in [-\infty, \infty)$  gilt  $f(x) \geq \alpha$  für alle  $x \in I$ . Andererseits gibt es zu jedem  $\alpha' > \alpha$  ein  $x' \in I$  mit  $f(x') < \alpha'$ , und somit  $f(x) < \alpha'$  für alle  $x < x'$ . Die Behauptung für den rechtsseitigen Grenzwert folgt analog.  $\square$

**Satz 2.2 (Monotonie und Umkehrfunktion)** Sei  $I$  ein Intervall mit Endpunkten  $a < b$ , und  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  sei streng monoton wachsend und stetig. Dann gilt:

- (1) Die Umkehrfunktion  $g : f(I) \rightarrow \mathbb{R}$  ist ebenfalls streng monoton wachsend und stetig.
- (2)  $I^* = f(I)$  ist ein Intervall mit Endpunkten  $\alpha = \lim_{x \searrow a} f(x) < \lim_{x \nearrow b} f(x) = \beta$ .
- (3)  $\lim_{y \searrow \alpha} g(y) = a$  und  $\lim_{y \nearrow \beta} g(y) = b$ .

BEWEIS: Wäre  $g$  nicht streng monoton wachsend, so gibt es  $y_1, y_2 \in f(I)$  mit  $y_1 < y_2$ , aber  $g(y_2) \leq g(y_1)$ . Aus der Monotonie von  $f$  folgt

$$y_2 = f(g(y_2)) \leq f(g(y_1)) = y_1,$$

im Widerspruch zur Annahme. Um die Stetigkeit von  $g$  im Punkt  $y_0 = f(x_0)$  zu zeigen, sei  $\varepsilon > 0$  gegeben. Nach Folgerung 2.1 ist dann  $f(U_\varepsilon(x_0) \cap I)$  ein Intervall mit den Grenzen

$$\alpha' = \inf\{f(x) : x \in U_\varepsilon(x_0) \cap I\} \quad \text{und} \quad \beta' = \sup\{f(x) : x \in U_\varepsilon(x_0) \cap I\}.$$

Im Fall  $a < x_0 < b$  gilt  $\alpha' < f(x_0) = y_0 < \beta'$ , da  $f$  streng monoton wachsend, also gibt es ein  $\delta > 0$  mit  $U_\delta(y_0) \subset f(U_\varepsilon(x_0) \cap I)$ . Es folgt

$$g(U_\delta(y_0)) \subset (g \circ f)(U_\varepsilon(x_0) \cap I) \subset U_\varepsilon(x_0),$$



was zu zeigen war. Für  $x_0 = a$  ist  $\alpha = f(x_0) = y_0 < \beta'$ , also gilt für hinreichend kleines  $\delta > 0$

$$U_\delta(y_0) \cap f(I) \subset [y_0, y_0 + \delta) \subset f(U_\varepsilon(x_0) \cap I),$$

und es folgt  $g(U_\delta(y_0) \cap f(I)) \subset U_\varepsilon(x_0)$ . Aussage (2) folgt direkt aus Folgerung 2.1 und Lemma 2.1, und (3) ergibt sich aus (1) und (2), angewandt auf die Funktion  $g$  statt  $f$ .  $\square$

Als Ergänzung zu Satz 2.2 bemerken wir noch

$$a \in I \Leftrightarrow \alpha \in I^* \quad \text{und} \quad b \in I \Leftrightarrow \beta \in I^*. \quad (2.1)$$

Denn für  $a \in I$  ist  $f(a) = \inf\{f(x) : x \in I\} = \alpha$ , also  $\alpha \in f(I)$ . Sei umgekehrt  $\alpha = f(x)$  für ein  $x \in I$ . Wäre  $x > a$ , so gibt es  $x' \in (a, x)$  mit  $f(x') < f(x) = \alpha$ , Widerspruch. Also folgt  $a = x \in I$ .

Wir wollen nun den Satz anwenden, um die Umkehrfunktion der reellen Exponentialfunktion zu konstruieren. Als erstes müssen wir dafür die Stetigkeit zeigen; das tun wir natürlich gleich in  $\mathbb{C}$ .

**Satz 2.3** *Die Exponentialfunktion  $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  ist stetig.*

BEWEIS: Für die Stetigkeit in  $z_0 = 0$  verwenden wir die Abschätzung aus Kapitel 1, Satz 4.7, und zwar ergibt der Fall  $n = 1$  für alle  $|z| \leq 1$

$$|\exp(z) - \exp(0)| = |\exp(z) - 1| \leq 2|z|.$$

Es folgt  $|\exp(z) - \exp(0)| < \varepsilon$  für  $|z| < \delta = \min(1, \varepsilon/2)$ . Für die Stetigkeit in  $z_0 \neq 0$  setzen wir die Funktionalgleichung ein: es gilt  $\exp(z - z_0) \rightarrow 1$  mit  $z \rightarrow z_0$ , also

$$\exp(z) = \exp(z_0) \exp(z - z_0) \rightarrow \exp(z_0) \quad \text{mit } z \rightarrow z_0.$$

$\square$

**Satz 2.4 (Definition des Logarithmus)** *Die Funktion  $\exp : (-\infty, \infty) \rightarrow (0, \infty)$  ist streng monoton wachsend, stetig und bijektiv, und es gilt*

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \exp(x) = \infty. \quad (2.2)$$

Die Umkehrfunktion  $\log : (0, \infty) \rightarrow (-\infty, \infty)$  heißt (natürlicher) Logarithmus. Die Funktion ist ebenfalls streng monoton wachsend, stetig und bijektiv, und es gilt

$$\lim_{y \searrow 0} \log(y) = -\infty \quad \text{und} \quad \lim_{y \rightarrow \infty} \log(y) = \infty. \quad (2.3)$$

Weiter ist  $\log(1) = 0$  und  $\log(e) = 1$ , und  $\log$  erfüllt die Funktionalgleichung

$$\log(y_1 y_2) = \log(y_1) + \log(y_2) \quad \text{für alle } y_1, y_2 > 0. \quad (2.4)$$

BEWEIS: Nach Definition der Exponentialfunktion gilt

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} > 1 + x \quad \text{für } x > 0.$$

Es folgt  $\lim_{x \rightarrow \infty} \exp(x) = \infty$ , sowie für  $x > 0$  mit der Funktionalgleichung

$$\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)} \rightarrow 0 \quad \text{mit } x \rightarrow \infty.$$

Weiter liefert die Funktionalgleichung für  $x_1 < x_2$

$$\frac{\exp(x_2)}{\exp(x_1)} = \exp(x_2 - x_1) > 1,$$

das heißt  $\exp$  ist streng monoton wachsend und stetig nach Satz 2.3. Nach Satz 2.2 ist nun  $\exp : (-\infty, \infty) \rightarrow (0, \infty)$  bijektiv, und die Umkehrfunktion  $\log : (0, \infty) \rightarrow (-\infty, \infty)$  erfüllt (2.3). Außerdem gilt  $\log(1) = \log(\exp(0)) = 0$ ,  $\log(e) = \log(\exp(1)) = 1$ . Die Funktionalgleichung (2.4) ergibt sich aus  $\exp(x_1) \exp(x_2) = \exp(x_1 + x_2)$ , indem wir  $x_k = \log(y_k)$  einsetzen und den Logarithmus nehmen.  $\square$

**Definition 2.1 (Potenz mit reellen Exponenten)** Für  $a > 0$ ,  $x \in \mathbb{R}$  definieren wir

$$a^x = \exp(x \log(a)).$$

Für rationale Exponenten  $r = p/q$  mit  $p \in \mathbb{Z}$  und  $q \in \mathbb{N}$  ist diese Definition konsistent mit der bereits gegebenen Definition als eindeutig bestimmte Lösung  $y$  der Gleichung  $y^q = a^p$ , denn  $\exp(x \log(a)) > 0$  und nach Folgerung 4.1 gilt

$$\exp(r \log(a))^q = \exp(q \cdot r \log(a)) = \exp(p \log(a)) = \exp(\log(a))^p = a^p.$$

Insbesondere können wir also  $\exp(x) = e^x$  schreiben. Durch die klassische Definition der Potenz ist die Funktion  $x \mapsto a^x$  für alle  $x \in \mathbb{Q}$  und damit auf einer dichten Teilmenge von  $\mathbb{R}$  schon definiert. Die Exponentialfunktion setzt diese Funktion auf alle  $x \in \mathbb{R}$  fort, genauer ist es die eindeutig bestimmte Fortsetzung, die stetig ist (Übungsaufgabe). Die Regeln der Potenzrechnung für  $a, b > 0$

$$\begin{aligned} a^x a^y &= a^{x+y} & (a^x)^y &= a^{xy} \\ \left(\frac{1}{a}\right)^x &= a^{-x} & a^x b^x &= (ab)^x \end{aligned}$$

ergeben sich leicht aus den Definitionen und den Funktionalgleichungen von  $\exp$  bzw.  $\log$ . Weiter sind nun auch die Potenzfunktionen für beliebige reelle Exponenten erklärt:

$$f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^\alpha = \exp(\alpha \log(x)).$$

**Folgerung 2.2 (Charakterisierung von  $\exp$  durch die Funktionalgleichung)** Die Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  habe folgenden beiden Eigenschaften:

- (1)  $f(x + y) = f(x) f(y)$  für alle  $x, y \in \mathbb{R}$ ,
- (2)  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$  (Stetigkeit bei  $x_0 = 0$ ).

Dann ist entweder  $a := f(1) > 0$  und  $f(x) = a^x$  für alle  $x$ , oder  $f$  ist identisch Null.

BEWEIS: Es ist  $f(1) = f\left(\frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$ . Im Fall  $f(1) = 0$  folgt für alle  $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = f((x-1)+1) = f(x-1)f(1) = 0.$$

Im Fall  $a > 0$  kann wie oben argumentiert werden, das heißt man zeigt mit der Funktionalgleichung  $f(x) = a^x$  für alle  $x \in \mathbb{Q}$ , und folgert  $f(x) = a^x$  für alle  $x \in \mathbb{R}$  aus der Stetigkeit.  $\square$

Nachdem die Diskussion der reellen Exponentialfunktion so ergiebig war, wollen wir nun auch die komplexe Exponentialfunktion anschauen; das wird sogar noch interessanter. Wir betrachten mit  $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$  die Abbildung

$$c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}, c(t) = \exp(it) = e^{it}, \quad \text{wobei } i = \sqrt{-1}. \quad (2.5)$$

In Folgerung 4.1 hatten wir schon gezeigt, dass  $c$  tatsächlich in den Einheitskreis abbildet, und zwar gilt

$$|c(t)|^2 = c(t)\overline{c(t)} = e^{it}e^{-it} = e^{it}e^{-it} = 1.$$

Das Ziel ist nun zu verstehen, wie sich der Punkt  $c(t)$  in Abhängigkeit von  $t$  auf dem Einheitskreis bewegt, genauer wollen wir sehen, dass  $c(t)$  periodisch ist und in jeder Periode den Einheitskreis einmal im mathematisch positiven Sinn (also gegen den Uhrzeigersinn) durchläuft. Erstmal geben wir den Komponenten von  $c(t) = e^{it}$  einen Namen.

**Definition 2.2** Die Funktionen Cosinus und Sinus  $\cos, \sin : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sind definiert durch

$$\cos t = \operatorname{Re} e^{it} = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \quad \text{und} \quad \sin t = \operatorname{Im} e^{it} = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}. \quad (2.6)$$

Es gilt also die Eulersche Formel

$$e^{it} = \cos t + i \sin t \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}. \quad (2.7)$$

Aus der Definition folgen die Potenzreihendarstellungen der Funktionen Sinus und Cosinus.

**Satz 2.5** Für alle  $t \in \mathbb{R}$  gelten die absolut konvergenten Potenzreihendarstellungen

$$\begin{aligned} \cos t &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{t^2}{2!} \pm \dots \quad \text{und} \\ \sin t &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} = t - \frac{t^3}{3!} \pm \dots \end{aligned}$$

BEWEIS: Die absolute Konvergenz ergibt sich mit Satz 4.3 aus der Abschätzung

$$\sum_{k=0}^N \frac{|t|^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^N \frac{|t|^{2k+1}}{(2k+1)!} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|t|^n}{n!} = e^{|t|} < \infty.$$

Mit  $i^{2k} = (-1)^k$  sowie  $i^{2k+1} = i(-1)^k$  berechnen wir

$$\sum_{n=0}^{2N+1} \frac{(it)^n}{n!} = \sum_{k=0}^N (-1)^k \frac{t^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^N (-1)^k \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Für  $N \rightarrow \infty$  ist die rechte Seite konvergent, die linke Seite geht gegen  $e^{it} = \cos t + i \sin t$ .  $\square$

**Lemma 2.2** Die Funktionen  $\cos, \sin : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sind stetig.

BEWEIS:  $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ ,  $c(t) = e^{it}$ , ist stetig als Verkettung der stetigen Abbildungen  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\varphi(t) = it$ , und  $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , vergleiche Satz 2.3. Dann sind auch  $\cos, \sin$  als Koordinatenfunktionen von  $c(t)$  stetig.  $\square$

**Lemma 2.3** Die Funktionen Cosinus und Sinus haben folgende Eigenschaften:

(1)  $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$  für alle  $t \in \mathbb{R}$ .

(2) Cosinus ist eine gerade und Sinus eine ungerade Funktion:

$$\cos(-t) = \cos t \quad \text{und} \quad \sin(-t) = -\sin t.$$

(3) Für alle  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  gelten die Additionstheoreme

$$\begin{aligned} \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta, \\ \sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta. \end{aligned}$$

BEWEIS: Behauptung (1) folgt direkt aus  $|e^{it}| = 1$ , Behauptung (2) gilt nach Definition und (3) ergibt sich aus der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion und Vergleich der Real- und Imaginärteile:

$$\cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta) = e^{i(\alpha + \beta)} = e^{i\alpha} e^{i\beta} = (\cos \alpha + i \sin \alpha) (\cos \beta + i \sin \beta).$$

$\square$

Ersetzen wir in den Additionstheoremen  $\alpha, \beta$  durch  $(\alpha + \beta)/2, (\alpha - \beta)/2$ , so erhalten wir

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} - \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \\ \sin \alpha &= \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} + \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}. \end{aligned}$$

Durch Vertauschen von  $\alpha$  und  $\beta$  und Subtraktion ergibt sich mit Lemma 2.3(2)

$$\begin{aligned} \cos \alpha - \cos \beta &= -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \\ \sin \alpha - \sin \beta &= 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \end{aligned} \tag{2.8}$$

Wir benötigen den folgenden Grenzwert.

**Lemma 2.4** Es gilt  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$ .

BEWEIS: Wir verwenden die Abschätzung der Exponentialfunktion aus Satz 4.7 mit  $z = it$  und  $n = 2$ . Wegen  $|\operatorname{Im} z| \leq |z|$  gilt danach für  $|t| \leq 3/2$

$$|\sin t - t| \leq |e^{it} - (1 + it)| \leq t^2.$$

Nach Division durch  $|t| > 0$  folgt mit  $t \rightarrow 0$  die Behauptung.  $\square$

**Satz 2.6 (Definition von  $\pi$ )** Es gibt eine eindeutig bestimmte Zahl  $\tau \in (0, \infty)$  mit folgenden Eigenschaften:

- (1) Auf  $(0, \tau)$  gilt  $\cos t, \sin t > 0$ .
- (2) Auf  $[0, \tau)$  ist  $\cos$  streng monoton fallend und  $\sin$  streng monoton wachsend.
- (3)  $\cos \tau = 0$  und  $\sin \tau = 1$ , also  $e^{i\tau} = i$ .

Wir definieren  $\pi = 2\tau$ .

BEWEIS: Als erstes zeigen wir, dass die Funktionen  $\cos$  und  $\sin$  auf einem hinreichend kleinen Intervall  $(0, t)$  strikt positiv sind. Wegen  $\cos 0 = 1$  folgt das für den Cosinus sofort aus der Stetigkeit. Für den Sinus gibt es wegen Lemma 2.4 ein  $t > 0$ , so dass für  $0 < t' < t$  gilt:

$$\frac{\sin t'}{t'} \geq 1/2 \quad \Rightarrow \quad \sin t' \geq t'/2 > 0.$$

Also ist die Menge  $M = \{t > 0 : \cos t', \sin t' > 0 \text{ für alle } t' \in (0, t)\}$  nichtleer und wir setzen  $\tau = \sup M$ . Behauptung (1) gilt dann nach Definition. Für  $0 \leq t_1 < t_2 < \tau$  folgt mit den Formeln (2.8), Lemma 2.3(2) und Aussage (1), da  $0 < (t_2 - t_1)/2 \leq (t_2 + t_1)/2 < \tau$ ,

$$\begin{aligned} \cos t_2 - \cos t_1 &= -2 \sin \frac{t_2 + t_1}{2} \sin \frac{t_2 - t_1}{2} < 0, \\ \sin t_2 - \sin t_1 &= 2 \cos \frac{t_2 + t_1}{2} \sin \frac{t_2 - t_1}{2} > 0. \end{aligned}$$

Dies zeigt Behauptung (2), insbesondere existieren die Grenzwerte  $\xi = \lim_{t \nearrow \tau} \cos t \in [0, 1)$  und  $\eta = \lim_{t \nearrow \tau} \sin t \in (0, 1]$ , vgl. Lemma 2.1. Um zu zeigen, dass  $\tau$  endlich ist, betrachten wir für ein  $t_0 \in (0, \tau)$  die Folge  $(e^{it_0})^k, k \in \mathbb{N}$ . Wäre  $\tau = +\infty$ , so folgt aus dem Bewiesenen

$$(e^{it_0})^k = e^{ikt_0} = \cos kt_0 + i \sin kt_0 \rightarrow \xi + i\eta \quad \text{mit } k \rightarrow \infty.$$

Aber  $|(e^{it_0})^{k+1} - (e^{it_0})^k| = |(e^{it_0})^k(e^{it_0} - 1)| = |e^{it_0} - 1| > 0$ , das heißt die Folge ist keine Cauchyfolge, ein Widerspruch. Also ist  $\tau < \infty$ , und mit der Stetigkeit folgt  $\cos \tau = \xi$  und  $\sin \tau = \eta$ . Nun ist  $\eta > 0$ , also muss  $\xi = 0$  gelten, denn sonst wären  $\cos$  und  $\sin$  beide strikt positiv nahe bei  $\tau$ , also  $\tau$  keine obere Schranke für  $M$ . Wegen  $\xi^2 + \eta^2 = 1$  und  $\eta > 0$  ist  $\eta = +1$ . Schließlich ist klar, dass  $\tau$  durch (1) und (3) eindeutig festgelegt ist.  $\square$

Mit Satz 2.6 erhalten wir

$$e^{i(t+\pi/2)} = e^{i\pi/2} e^{it} = i e^{it}, \tag{2.9}$$

bzw. wegen  $e^{i(t+\pi/2)} = \cos(t + \pi/2) + i \sin(t + \pi/2)$  und  $i e^{it} = -\sin t + i \cos t$

$$\cos(t + \pi/2) = -\sin t \quad \text{und} \quad \sin(t + \pi/2) = \cos t. \tag{2.10}$$

Damit können wir eine Wertetabelle der Funktionen erstellen. Die Ziffern I bis IV bedeuten die gegen den Uhrzeiger nummerierten Quadranten.

|          |   |         |       |          |        |
|----------|---|---------|-------|----------|--------|
| $t$      | 0 | $\pi/2$ | $\pi$ | $3\pi/2$ | $2\pi$ |
| $e^{it}$ | 1 | $i$     | -1    | $-i$     | 1      |
| $\cos$   | 1 | 0       | -1    | 0        | 1      |
| $\sin$   | 0 | 1       | 0     | -1       | 0      |

**Folgerung 2.3** Die Funktionen  $e^{it}$ ,  $\cos t$  und  $\sin t$  sind  $2\pi$ -periodisch, und  $2\pi$  ist die kleinste Periode für jede der Funktionen.

BEWEIS: Es gilt  $e^{2\pi i} = 1$  und damit  $e^{i(t+2\pi)} = e^{it}e^{2\pi i} = e^{it}$  für alle  $t$ , also sind die Funktionen  $2\pi$ -periodisch. Wäre  $e^{it}$  periodisch mit Periode  $p \in (0, 2\pi)$ , so folgt  $e^{ip} = e^{i0} = 1$ , was der Wertetabelle widerspricht. Weiter ist eine Periode von Cosinus oder Sinus auch Periode von  $e^{it}$  wegen (2.10). Damit ist die Folgerung bewiesen.  $\square$

Wir können zum Beispiel nun die Nullstellen der trigonometrischen Funktionen angeben.

$$e^{it} = 1 \Leftrightarrow t = 2k\pi \quad \text{mit } k \in \mathbb{Z}, \quad (2.11)$$

$$\cos t = 0 \Leftrightarrow t = \pi/2 + k\pi \quad \text{mit } k \in \mathbb{Z}, \quad (2.12)$$

$$\sin t = 0 \Leftrightarrow t = k\pi \quad \text{mit } k \in \mathbb{Z}. \quad (2.13)$$

**Satz 2.7 (Arcusfunktionen)** Die Funktionen  $\cos : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$  und  $\sin : [-\pi/2, \pi/2] \rightarrow [-1, 1]$  sind streng monoton fallend bzw. wachsend und bijektiv. Ihre Umkehrfunktionen  $\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$  bzw.  $\arcsin : [-1, 1] \rightarrow [-\pi/2, \pi/2]$  sind gleichfalls stetig, streng monoton fallend bzw. wachsend und es gilt

$$\begin{aligned} \lim_{x \searrow -1} \arccos x = \pi \quad \text{und} \quad \lim_{x \nearrow 1} \arccos x = 0, \\ \lim_{y \searrow -1} \arcsin y = -\pi/2 \quad \text{und} \quad \lim_{y \nearrow 1} \arcsin y = \pi/2. \end{aligned}$$

BEWEIS: Alle Aussagen folgen aus Satz 2.2 und unserer Wertetabelle.  $\square$

**Satz 2.8 (Polarkoordinaten)** Zu jedem  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  gibt es eindeutig bestimmte  $r > 0$ ,  $\vartheta \in [0, 2\pi)$  mit  $z = re^{i\vartheta}$ .

BEWEIS: Wir behaupten, dass die Abbildung  $c : [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{S}^1$ ,  $c(t) = e^{it}$ , bijektiv ist. Denn aus  $e^{it_1} = e^{it_2}$  folgt  $e^{i(t_1-t_2)} = 1$ , also  $t_1 - t_2 = 2k\pi$  mit  $k \in \mathbb{Z}$ . Für  $t_1, t_2 \in (0, 2\pi)$  folgt dann  $t_1 = t_2$ . Für die Surjektivität definieren wir für  $x + iy \in \mathbb{S}^1$

$$\vartheta = \begin{cases} \arccos x & \text{für } y \geq 0 \\ 2\pi - \arccos x & \text{für } y < 0. \end{cases}$$

Wegen  $\arccos x \in [0, \pi]$  und  $\sin \vartheta = \sqrt{1 - \cos^2 \vartheta}$  für  $\vartheta \in [0, \pi]$  folgt für  $y \geq 0$

$$e^{i\vartheta} = \cos(\arccos x) + i \sin(\arccos x) = x + i \sqrt{1 - x^2} = x + iy = z.$$

Aus  $\cos(2\pi - \arccos x) = \cos x$  und  $\sin(2\pi - x) = -\sin x$  folgt für  $y < 0$

$$e^{i\vartheta} = \cos(\arccos x) - i \sin(\arccos x) = x - i \sqrt{1 - x^2} = x + iy = z.$$

Für allgemeines  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  setzen wir  $r = |z| > 0$  und wählen  $\vartheta \in [0, 2\pi)$  mit  $e^{i\vartheta} = z/|z|$ . Es folgt  $z = re^{i\vartheta}$  wie gewünscht.  $\square$

Die durch den Satz definierte Funktion  $\arg : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow [0, 2\pi)$ , die jedem  $z$  den Polarwinkel  $\vartheta = \arg(z)$  zuordnet, hat längs der positiven  $x$ -Achse einen Sprung:

$$\lim_{y \searrow 0} \arg(x + iy) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{y \nearrow 0} \arg(x + iy) = 2\pi \quad \text{für alle } x > 0.$$

Ansonsten ist die Funktion stetig. In der Schule werden die Funktionen Cosinus, Sinus und Tangens durch die Längenverhältnisse am rechtwinkligen Dreieck eingeführt. Um dies jedoch zu einer exakten Definition zu machen, muss ein Konzept zur Messung von Winkeln zur Verfügung stehen, es muss also die Länge eines Einheitskreisbogens definiert werden. An dieser Stelle wollen dies nur ad hoc betrachten. Um die Länge eines Bogens

$$c : [0, \alpha] \rightarrow \mathbb{S}^1, c(t) = e^{it},$$

zu bestimmen, wählen wir  $t_k = k\alpha/n$  mit  $k = 0, 1, \dots, n$  und erhalten die Näherung

$$L_n = \sum_{k=1}^n |c(t_k) - c(t_{k-1})| = \sum_{k=1}^n |e^{i(k-1)\alpha/n}(e^{i\alpha/n} - 1)| = n|e^{i\alpha/n} - 1|.$$

Nach Satz 4.7 gilt für  $|z| \leq 3/2$  die Abschätzung  $|e^z - (1+z)| \leq |z|^2$ , also ergibt sich

$$|L_n - \alpha| = n||e^{i\alpha/n} - 1| - |i\alpha/n|| \leq n|e^{i\alpha/n} - 1 - i\alpha/n| \leq n(\alpha/n)^2 \rightarrow 0 \quad \text{mit } n \rightarrow \infty.$$

Die Länge von  $c$  auf  $[0, \alpha]$  ist also gleich  $\alpha$ , das heißt  $c$  bildet längentreu ab und insbesondere ist die Länge des Vollkreises  $2\pi$ . wie es sein sollte.