Kapitel 4

Differentialrechnung für Funktionen einer Variablen

1 Die Ableitung: Definition und Regeln

Im diesem Abschnitt betrachten wir stets reellwertige oder vektorwertige Funktionen einer Variablen, die auf einem offenen Intervall $I \subset \mathbb{R}$ definiert sind.

Definition 1.1 (Ableitung) *Die Funktion $f : I \to \mathbb{R}^n$ hat in $x_0 \in I$ die Ableitung $a \in \mathbb{R}^n$ (Notation: $f'(x_0) = a$), falls gilt:*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a. \tag{1.1}$$

Wir nennen f differenzierbar in x_0, falls es ein $a \in \mathbb{R}^n$ mit (1.1) gibt, falls also der in (1.1) betrachtete Grenzwert existiert.

Eine alternative Formulierung ergibt sich durch die Substitution $x = x_0 + h$:

$$f'(x_0) = a \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = a.$$

Leibniz interessierte sich für die Definition der Ableitung im Zusammenhang mit dem Problem, die Tangente an eine ebene Kurve in einem gegebenen Punkt zu definieren. Nehmen wir dazu an, dass die Kurve als Graph einer Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ gegeben ist, und dass die Tangente im Punkt $(x_0, f(x_0))$ gesucht ist. Der Differenzenquotient

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad (x_0, x \in I,\, x \neq x_0)$$

ist geometrisch die Steigung der Sekante durch die Punkte $(x_0, f(x_0))$ und $(x, f(x))$. Die Existenz der Ableitung bedeutet, dass die Sekantensteigungen für $x \to x_0$ gegen den Wert $f'(x_0)$ konvergieren. Die Tangente wird nun definiert als die Gerade, die durch den Punkt $(x_0, f(x_0))$ geht und die Steigung $f'(x_0)$ hat. Daraus ergibt sich ihre Gleichung

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Im Fall von vektorwertigen Funktionen, also $n \geq 2$, ist der Grenzwert in (1.1) wie üblich bezüglich der Euklidischen Norm aufzufassen. Der in Kapitel 2 bewiesene Satz 5.3 über die Äquivalenz von Normkonvergenz und Konvergenz der Koordinaten besagt hier Folgendes:

Lemma 1.1 *Die Funktion $f : I \to \mathbb{R}^n$ ist genau dann in $x_0 \in I$ differenzierbar, wenn alle Koordinatenfunktionen $f_i : I \to \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$, in x_0 differenzierbar sind. Die Ableitung kann dann koordinatenweise berechnet werden, das heißt es gilt:*

$$f'(x_0) = ((f_1)'(x_0), \dots, (f_n)'(x_0)) \in \mathbb{R}^n.$$

Newton entwickelte den Differentialkalkül (Englisch: Calculus) unter anderem um die Keplerschen Gesetze für die Planetenbewegung zu begründen, genauer konnte er diese Gesetze alle aus dem Gravitationsgesetz ableiten. Dazu wird die Bewegung eines Planeten durch eine Abbildung

$$f : I \to \mathbb{R}^3, \quad f(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big),$$

beschrieben, also durch dessen Koordinaten zur Zeit $t \in I$ bezüglich eines Euklidischen Koordinatensystems. Erstes Ziel ist dann die Definition der Momentangeschwindigkeit als Vektor in $\mathbb{R}^3$. Die vektorielle Durchschnittsgeschwindigkeit auf dem Zeitintervall $[t_0, t]$ ist der Quotient von Weg und Zeit, also gleich

$$\frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} \in \mathbb{R}^3.$$

Die Momentangeschwindigkeit $v(t_0)$ zum Zeitpunkt $t = t_0$ ist deshalb als vektorielle Ableitung zu definieren, wobei Newton einen Punkt statt eines Strichs benutzt hat:

$$v(t_0) = f'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)) \in \mathbb{R}^3.$$

Definition 1.2 (Ableitungsfunktion) *Die Funktion $f : I \to \mathbb{R}^n$ heißt differenzierbar auf I (oder einfach differenzierbar), falls f in jedem Punkt $x_0 \in I$ differenzierbar ist. Die hierdurch gegebene Funktion*

$$f' : I \to \mathbb{R}^n, \quad x_0 \mapsto f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \mathbb{R}^n$$

heißt Ableitungsfunktion oder schlicht Ableitung von f.

Beispiel 1.1 Für eine konstante Funktion, also $f(x) = c \in \mathbb{R}^n$ für alle $x \in I$, gilt für $x \neq x_0$:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{c - c}{x - x_0} = 0 \quad \Rightarrow \quad f'(x_0) = 0 \text{ bzw. } f' = 0.$$

Beispiel 1.2 Für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$, gilt

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1 \quad \text{für alle } x \neq x_0,$$

also folgt $f'(x_0) = 1$.

Beispiel 1.3 Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$, ist nicht differenzierbar in $x_0 = 0$:

$$\lim_{x \searrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \searrow 0} \frac{x}{x} = 1 \quad \text{und} \quad \lim_{x \nearrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \nearrow 0} \frac{-x}{x} = -1.$$

Die rechts- und linksseitige Ableitung existieren in $x_0 = 0$, sie sind aber verschieden.

Für die Ableitung der Exponentialfunktion gehen wir ähnlich wie bei der Stetigkeit vor, indem wir erst den Fall $x = 0$ mit einer expliziten Abschätzung behandeln und dann die Funktionalgleichung einsetzen.

Satz 1.1 *Die Funktion* $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *ist differenzierbar mit Ableitung* $\exp' = \exp$.

Beweis: Für $x = 0$ folgt die Aussage aus Satz 4.7 in Kapitel 2, und zwar mit $n = 2$:

$$\left| \frac{e^x - e^0}{x - 0} - e^0 \right| = \left| \frac{e^x - 1}{x} - 1 \right| = \frac{|e^x - (1+x)|}{|x|} \leq |x| \to 0 \quad \text{ mit } x \to 0.$$

Für $x \neq 0$ schließen wir weiter mit der Funktionalgleichung

$$\frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \, \frac{e^h - 1}{h} \to e^x \quad \text{ mit } h \to 0.$$

□

Satz 1.2 *Die Abbildung* $c : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $c(t) = e^{it}$, *ist differenzierbar mit Ableitung* $c' = ic$. *Insbesondere sind auch* $\cos$ *und* $\sin$ *differenzierbar und es gilt*

$$\cos' = -\sin \qquad \textit{und} \qquad \sin' = \cos.$$

Beweis: Für die Ableitung in $t = 0$ verwenden wir wieder Satz 4.7 in Kapitel 2, mit $n = 2$,

$$\left| \frac{c(t) - c(0)}{t - 0} - ic(0) \right| = \left| \frac{e^{it} - 1}{t} - i \right| = \frac{|e^{it} - (1+it)|}{|t|} \leq |t| \to 0 \quad \text{ mit } t \to 0.$$

Für beliebige t ergibt sich mit der Funktionalgleichung

$$\frac{c(t+h) - c(t)}{h} = \frac{e^{i(t+h)} - e^{it}}{h} = e^{it} \, \frac{e^{ih} - 1}{h} \to ie^{it} = ic(t) \quad \text{ für } h \to 0.$$

Lemma 1.1 besagt nun, dass cos und sin als Koordinatenfunktionen von c ebenfalls differenzierbar sind mit Ableitung $c'(t) = \cos'(t) + i \sin'(t)$. Wegen $ic(t) = -\sin t + i \cos t$ folgt $\cos' = -\sin$ und $\sin' = \cos$ wie behauptet. □

Der Satz besagt anschaulich, dass der Punkt $c(t) = e^{it}$ den Einheitskreis mit konstanter Absolutgeschwindigkeit $|c'(t)| = 1$ durchläuft. Der Umlaufsinn ist dabei positiv, das heißt der Vektor ic' weist ins Innere des Kreises.

Das folgende Lemma gibt eine geringfügige Umformulierung des Begriffs der Differenzierbarkeit. Danach ist f genau dann in x_0 differenzierbar, wenn f mit einer affinlinearen Funktion übereinstimmt bis auf einen Fehler, der schneller als linear verschwindet.

Lemma 1.2 *Genau dann hat* $f : I \to \mathbb{R}^n$ *in* $x_0 \in I$ *die Ableitung* $a \in \mathbb{R}^n$, *wenn für die Differenzfunktion* $r(h) = f(x_0 + h) - (f(x_0) + ah)$ *gilt:*

$$\lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{h} = 0. \tag{1.2}$$

Beweis: Für $h \neq 0$ gilt

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} - a = \frac{f(x_0+h)-(f(x_0)+a\,h)}{h} = \frac{r(h)}{h}.$$

Hieraus ergibt sich die Behauptung. $\square$

Satz 1.3 *Ist $f : I \to \mathbb{R}^n$ differenzierbar in $x_0 \in I$, so ist f auch stetig in x_0.*

Beweis: Nach Lemma 1.4 in Kapitel 3 reicht es zu zeigen, dass $\lim_{h\to 0} f(x_0+h) = f(x_0)$. Aber für $h \neq 0$ gilt nach Lemma 1.2

$$f(x_0+h) = f(x_0) + ah + h\,\frac{r(h)}{h} \to f(x_0) \text{ mit } h \to 0.$$

$\square$

Satz 1.4 (Differentiationsregeln) *Seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $x_0 \in I$. Dann sind auch die Funktionen $\alpha f + \beta g$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$, fg und f/g (im Fall $g(x_0) \neq 0$) in x_0 differenzierbar mit folgenden Ableitungen:*

(1) *Linearität:*

$$(\alpha f + \beta g)'(x_0) = \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0)$$

(2) *Produktregel:*

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

(3) *Quotientenregel:*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}$$

Beweis: Wir müssen jeweils für $x \neq x_0$ die Differenzenquotienten bilden und zeigen, dass diese mit $x \to x_0$ gegen das gewünschte konvergieren. Für (1) haben wir

$$\begin{aligned}
\frac{(\alpha f(x) + \beta g(x)) - (\alpha f(x_0) + \beta g(x_0))}{x - x_0} &= \alpha\,\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} + \beta\,\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} \\
&\to \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0).
\end{aligned}$$

Natürlich gilt die Aussage mit demselben Argument auch für vektorwertige Funktionen. Die Produktregel folgt durch „Mischen der Terme“:

$$\begin{aligned}
\frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} &= \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\,g(x) + f(x_0)\,\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} \\
&\to f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0),
\end{aligned}$$

wobei die Stetigkeit von g in x_0 benutzt wurde (Satz 1.3). Wir zeigen die Quotientenregel zunächst für die Funktion $1/g$, also $f \equiv 1$. Es gibt ein $\delta > 0$ mit $g(x) \neq 0$ für $|x - x_0| < \delta$ nach Kapitel 3, Lemma 1.3. Für diese $x \in I$ gilt

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x-x_0}\left(\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)}\right) &= -\frac{1}{g(x)g(x_0)}\,\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} \\
&\to -\frac{1}{g(x_0)^2}\,g'(x_0) \quad \text{mit } x \to x_0.
\end{aligned}$$

Für beliebiges f schreiben wir $f/g = f \cdot \dfrac{1}{g}$ und verwenden die Produktregel. $\square$

Beispiel 1.4 Für $f_n(x) = x^n$ folgt aus Beispiel 1.2, also $f_1' = 1$, und der Produktregel

$$f_n'(x) = (f_1 f_{n-1})'(x) = f_1'(x) f_{n-1}(x) + f_1(x) f_{n-1}'(x) = x^{n-1} + x\, f_{n-1}'(x),$$

und damit per Induktion $f_n'(x) = nx^{n-1}$. Allgemeiner ergibt sich mit Satz 1.4(1) für Polynome $p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ die Formel

$$p'(x) = \sum_{k=1}^n k a_k x^{k-1} = \sum_{j=0}^{n-1} (j+1) a_{j+1} x^j.$$

Beispiel 1.5 Für $f(x) = x^{-n}$, $n \in \mathbb{N}$, gilt $f'(x) = -nx^{-n-1}$ nach der Quotientenregel:

$$f'(x) = -\frac{nx^{n-1}}{(x^n)^2} = -nx^{-n-1}.$$

Satz 1.5 (Kettenregel) *Seien $f : I \to \mathbb{R}$, $g : J \to \mathbb{R}$ mit $f(I) \subset J$. Ist f in $x_0 \in I$ differenzierbar und g in $y_0 = f(x_0) \in J$ differenzierbar, so ist auch $g \circ f : I \to \mathbb{R}$ in x_0 differenzierbar und hat die Ableitung*

$$(g \circ f)'(x_0) = g'\big(f(x_0)\big)\, f'(x_0).$$

Beweis: Wir betrachten wieder für $x \neq x_0$ den Differenzenquotienten:

$$\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = \begin{cases} \dfrac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \, \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} & \text{falls } f(x) \neq f(x_0) \\ 0 & \text{falls } f(x) = f(x_0). \end{cases}$$

Wir definieren die Funktion

$$a : J \to \mathbb{R},\ a(y) = \begin{cases} \dfrac{g(y) - g(f(x_0))}{y - f(x_0)} & \text{für } y \neq f(x_0) \\ g'(f(x_0)) & \text{für } y = f(x_0). \end{cases}$$

Es ist a stetig in $f(x_0)$ nach Kapitel 3, Lemma 1.4. Mit $x \to x_0$ folgt, da $f(x) \to f(x_0)$,

$$\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = a(f(x)) \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \to a(f(x_0))\, f'(x_0) = g'(f(x_0)) f'(x_0).$$

□

Satz 1.6 (Differenzierbarkeit der Umkehrfunktion) *Sei $f : I \to \mathbb{R}$ streng monoton und stetig auf dem offenen Intervall I, und differenzierbar in x_0 mit $f'(x_0) \neq 0$. Dann ist $I^* = f(I)$ ein offenes Intervall, und die Umkehrfunktion $g : I^* \to I$ ist differenzierbar in $y_0 = f(x_0)$ mit Ableitung*

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'\big(g(y_0)\big)}.$$

Beweis: Nach Satz 2.2 in Kapitel 3 mit Zusatz (2.1) ist I^* ein offenes Intervall und $g : I^* \to \mathbb{R}$ streng monoton und stetig, insbesondere $g(y) \to g(y_0) = x_0$ mit $y \to y_0$. Für $y \neq y_0$ folgt

$$\frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} = \frac{g(y) - g(y_0)}{f(g(y)) - f(g(y_0))} = \frac{1}{\frac{f(g(y)) - f(g(y_0))}{g(y) - g(y_0)}} \to \frac{1}{f'(x_0)}.$$

□

Seien I, I^* offene Intervalle, $f : I \to I^*$ bijektiv und in x_0 differenzierbar. Ist die Umkehrfunktion $g : I^* \to I$ in $y_0 = f(x_0)$ auch differenzierbar, so folgt schon aus der Kettenregel

$$g(f(x)) = x \quad \Rightarrow \quad g'(f(x_0))f'(x_0) = 1.$$

Insbesondere muss $f'(x_0) \neq 0$ sein, und es gilt die Formel für die Ableitung der Umkehrfunktion. Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$, ist streng monoton wachsend und stetig; ihre Umkehrfunktion lautet

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(y) = \begin{cases} y^{1/3} & \text{für } y \geq 0 \\ -|y|^{1/3} & \text{für } y \leq 0. \end{cases}$$

Die Umkehrfunktion ist nicht differenzierbar in $y = 0$, denn es gilt

$$\frac{g(y) - g(0)}{y - 0} = |y|^{-2/3} \to +\infty \text{ mit } y \to 0.$$

Die Voraussetzung des Satzes ist hier verletzt, es ist $f'(0) = 0$.

Die beiden vorangegangenen Regeln sind in der von Leibniz eingeführten Notation besonders suggestiv. Leibniz schreibt Funktionen in der Form $y = y(x)$ und bezeichnet die Ableitung mit dem Symbol $\frac{dy}{dx}$, das auch als *Differentialquotient* bezeichnet wird. Formal ergeben sich die Kettenregel und die Regel für die Ableitung der Umkehrfunktion dann aus der Bruchrechnung:

$$\begin{aligned} y = y(x),\ z = z(y) \quad &\Rightarrow \quad \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}, \\ y = y(x),\ x = x(y) \quad &\Rightarrow \quad \frac{dx}{dy} = \Big(\frac{dy}{dx}\Big)^{-1}. \end{aligned}$$

Bei der Anwendung dieser saloppen Notation ist jedoch darauf zu achten, wo die jeweiligen Funktionen definiert sind.

Satz 1.7 *Die Funktion* $\log : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ *ist differennzierbar mit Ableitung*

$$\log'(y) = \frac{1}{y}.$$

Beweis: Dies folgt aus Satz 1.1 und Satz 1.6, genauer ist

$$\log'(y) = \frac{1}{\exp'(\log y)} = \frac{1}{\exp(\log y)} = \frac{1}{y}.$$

$\square$

Als eine Anwendung von Satz 1.7 haben wir einen zweiten Beweis von

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Es folgt aus

$$\lim_{n\to\infty} n\log\left(1+\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{\log(1+\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} = \log'(1) = 1$$

und die Stetigkeit von exp. Denn

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\exp(n\log\left(1+\frac{1}{n}\right)) = \exp(\lim_{n\to\infty} n\log\left(1+\frac{1}{n}\right)) = e.$$

Beispiel 1.6 Die Funktion $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^\alpha$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$ ist Verkettung der Funktionen $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = \alpha\log(x)$. Mit der Kettenregel berechnen wir

$$f'(x) = \exp'(h(x))h'(x) = \exp(\alpha\log(x))\,\frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

Beispiel 1.7 Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = a^x$ mit $a > 0$, ist Verkettung von exp und $h(x) = \log(a)x$, deshalb folgt

$$f'(x) = \exp'(h(x))h'(x) = \exp(\log(a)x)\ \log(a) = \log(a)a^x.$$

Beispiel 1.8 Die Differenzierbarkeit der Arcusfunktionen auf dem offenen Intervall $(-1,1)$ folgt aus den Sätzen 1.2 und 1.6. Beachtet man $\cos^2 + \sin^2 = 1$ sowie $\arccos x \in (0,\pi)$ bzw. $\arcsin x \in (-\pi/2, \pi/2)$, so erhält man

$$\begin{aligned}
\arccos'(x) &= \frac{1}{\cos'(\arccos x)} = -\frac{1}{\sin(\arccos x)} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\\
\arcsin'(x) &= \frac{1}{\sin'(\arcsin x)} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.
\end{aligned}$$

2 Mittelwertsatz und Anwendungen

Es ist eine zentrales Problem der Analysis, aus Eigenschaften der Ableitung auf Eigenschaften der Funktion selbst zu schließen. Der Mittelwertsatz ist dafür ein einfaches und effektives Hilfsmittel. Für seinen Beweis müssen wir allerdings erst über Extremwerte – Maxima und Minima – von stetigen Funktionen sprechen. Da sich keine Unterschiede ergeben, betrachten wir dabei gleich reellwertige Funktionen auf einer Teilmenge des $\mathbb{R}^n$.

Wir benötigen einen Satz, der die Existenz von Extremalstellen für eine stetige Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ allgemein garantiert. Ohne Voraussetzungen an D kann das nicht gehen, wie etwa das folgende Beispiel zeigt:

$$f : D = (0,\infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{1+x}.$$

Hier wird weder das Supremum $\sup_{x\in D} f(x) = 1$ noch das Infimum $\inf_{x\in D} f(x) = 0$ durch die Funktion angenommen.

Satz 2.1 (Existenz von Extremalstellen) *Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ nichtleer, abgeschlossen und beschränkt, und sei $f : D \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist f beschränkt und nimmt sein Infimum und Supremum an, das heißt es gibt $x_0, x_1 \in D$ mit*

$$f(x_0) = \inf_{x \in D} f(x) \quad \text{und} \quad f(x_1) = \sup_{x \in D} f(x).$$

Beweis: Setze $\alpha = \inf_{x \in D} f(x) \in [-\infty, \infty)$. Wir zeigen die Existenz eines $x_0 \in D$ mit $f(x_0) = \alpha$, daraus folgt insbesondere $\alpha > -\infty$, das heißt f ist nach unten beschränkt. Für das Supremum kann analog argumentiert werden.

Nach Definition des Infimums gibt es eine Folge $x_k \in D$ mit $f(x_k) \to \alpha$. Da D beschränkt, ist die Folge x_k beschränkt. Nach Bolzano-Weierstraß, siehe Satz 2.8 bzw. Folgerung 5.2 in Kapitel 2, gibt es eine Teilfolge x_{k_j} und ein $x_0 \in \mathbb{R}^n$ mit $x_{k_j} \to x_0$ für $j \to \infty$. Aus D abgeschlossen, siehe Definition 5.7 in Kapitel 2, folgt $x_0 \in D$. Aber dann gilt wegen der Stetigkeit von f

$$-\infty < f(x_0) = \lim_{j \to \infty} f(x_{k_j}) = \alpha.$$

$\square$

Im Beweis spielte die folgende Eigenschaft von D eine Rolle:

Definition 2.1 (Folgenkompaktheit) *Eine Menge $D \subset \mathbb{R}^n$ heißt folgenkompakt, wenn es zu jeder Folge $x_k \in D$ eine Teilfolge x_{k_j} gibt, die konvergiert und deren Grenzwert in D liegt:*

$$\lim_{j \to \infty} x_{k_j} = x_0 \in D.$$

Wir halten aus dem Beweis von Satz 2.1 folgende Beobachtung fest:

Satz 2.2 *Für $D \subset \mathbb{R}^n$ sind äquivalent:*

(1) *D ist folgenkompakt.*

(2) *D ist abgeschlossen und beschränkt.*

Beweis: Die Implikation (2) $\Rightarrow$ (1) wurde im Beweis von Satz 2.1 gezeigt. Jetzt setzen wir (1) voraus. Um die Abgeschlossenheit von D zu zeigen, sei $x_k \in D$ eine beliebige Folge mit $x_k \to x_0 \in \mathbb{R}^n$. Da D folgenkompakt, gibt es eine Teilfolge x_{k_j}, die gegen ein $x_0' \in D$ konvergiert. Aus der Eindeutigkeit des Grenzwerts folgt $x_0 = x_0' \in D$, also ist D abgeschlossen. Wäre D nicht beschränkt, so gibt es zu $k \in \mathbb{N}$ ein $x_k \in D$ mit $|x_k| \geq k$. Da D kompakt, existiert eine konvergente Teilfolge x_{k_j}, und diese ist nach Satz 1.2 in Kapitel 2 beschränkt, ein Widerspruch. $\square$

Wir kommen jetzt wieder zurück zur eindimensionalen Situation.

Definition 2.2 (Lokale Extrema) *Die Funktion $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ hat in $x_0 \in (a,b)$ ein lokales Minimum, falls es ein $\delta > 0$ gibt, so dass gilt:*

$$f(x_0) \leq f(x) \quad \text{für alle } x \in U_\delta(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

Ist sogar $f(x_0) < f(x)$ für $x \in U_\delta(x_0)$, $x \neq x_0$, so heißt das lokale Minimum isoliert. Ein (isoliertes) lokales Maximum ist entsprechend definiert.

Satz 2.3 (notwendige Bedingung für Extrema) *Die Funktion $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ habe in $x_0 \in (a,b)$ ein lokales Extremum. Ist f in x_0 differenzierbar, so gilt $f'(x_0) = 0$.*

Beweis: Sei x_0 lokales Minimum von f. Dann gibt es ein $\delta > 0$ mit $f(x) \geq f(x_0)$ für $x \in U_\delta(x_0)$, also gilt

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \begin{cases} \geq 0 & \text{für } x \in (x_0, x_0 + \delta), \\ \leq 0 & \text{für } x \in (x_0 - \delta, x_0). \end{cases}$$

Mit $x \searrow x_0$ folgt $f'(x_0) \geq 0$, mit $x \nearrow x_0$ folgt $f'(x_0) \leq 0$. □

Die Funktion $f(x) = x^3$ erfüllt $f'(0) = 0$, aber in $x = 0$ liegt kein lokales Extremum vor. Die Bedingung $f'(x_0) = 0$ ist notwendig für eine lokale Extremalstelle einer differenzierbaren Funktion, aber sie ist nicht hinreichend.

Satz 2.4 (Mittelwertsatz der Differentialrechnung) *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und differenzierbar auf (a,b). Dann gibt es ein $\xi \in (a,b)$ mit*

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Beweis: Wir zeigen die Behauptung zuerst im Fall $f(a) = f(b) = 0$ (Satz von Rolle). Wir brauchen dann ein $\xi \in (a,b)$ mit $f'(\xi) = 0$. Nach Satz 2.1 gibt es $\xi_1, \xi_2 \in [a,b]$ mit mit

$$f(\xi_1) = \inf_{x \in [a,b]} f(x) \quad \text{und} \quad f(\xi_2) = \sup_{x \in [a,b]} f(x).$$

Ist $\xi_1 \in (a,b)$, so folgt $f'(\xi_1) = 0$ nach Satz 2.3 und wir können $\xi = \xi_1$ wählen. Analog, wenn $\xi_2 \in (a,b)$. Im verbleibenden Fall $\xi_1, \xi_2 \in \{a,b\}$ folgt $\inf f = \sup f = 0$ bzw. $f(x) = 0$ für alle $x \in [a,b]$, und damit auch $f'(x) = 0$ für alle x. Seien nun $f(a), f(b)$ beliebig. Definiere $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ durch Abziehen der Sekante:

$$h(x) = f(x) - \left(f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \right).$$

Es gilt $h(a) = h(b) = 0$. Also existiert ein $\xi \in (a,b)$ mit

$$0 = h'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

□

Folgerung 2.1 (Monotoniekriterium) *Sei f differenzierbar auf (a,b), stetig auf $[a,b]$. Dann gelten folgende Aussagen:*

$$\begin{aligned} f'(x) \geq 0 \text{ für alle } x \in (a,b) \quad &\Rightarrow \quad f \text{ ist wachsend auf } [a,b] \\ f'(x) \leq 0 \text{ für alle } x \in (a,b) \quad &\Rightarrow \quad f \text{ ist fallend auf } [a,b] \\ f'(x) = 0 \text{ für alle } x \in (a,b) \quad &\Rightarrow \quad f \text{ ist konstant.} \end{aligned}$$

Bei strikter Ungleichung folgt strenge Monotonie auf $[a,b]$.

BEWEIS: Sei $a \le x_1 < x_2 \le b$. Nach dem Mittelwertsatz gibt es ein $\xi \in (x_1, x_2)$, so dass gilt:

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi) \underbrace{(x_2 - x_1)}_{>0} \begin{cases} \ge 0 & \text{wenn } f'(\xi) \ge 0 \\ > 0 & \text{wenn } f'(\xi) > 0 \\ \le 0 & \text{wenn } f'(\xi) \le 0 \\ < 0 & \text{wenn } f'(\xi) < 0 \\ = 0 & \text{wenn } f'(\xi) = 0 \end{cases}.$$

□

Folgerung 2.2 (Schrankensatz) *Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und differenzierbar auf (a, b), so gilt für $a \le x_1 < x_2 \le b$:*

$$\begin{aligned} f'(x) \ge m \text{ für alle } x \in (a, b) \quad &\Rightarrow \quad \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \ge m \\ f'(x) \le M \text{ für alle } x \in (a, b) \quad &\Rightarrow \quad \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \le M. \end{aligned}$$

BEWEIS: Wir zeigen die erste Aussage. Mit $g(x) = mx$ gilt $(f - g)' = f' - g' \ge m - m = 0$. Nach Folgerung 2.1 ist $f - g$ wachsend, ds heißt $f(x_2) - m\,x_2 \ge f(x_1) - m\,x_1$. Die Behauptung folgt. □

Der Mittelwertsatz gilt nicht für vektorwertige Funktionen $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, $n \ge 2$. Technisch liegt das daran, dass die Stelle ξ aus dem Satz für die einzelnen Koordinatenfunktionen im allgemeinen verschieden ist. Ein konkretes Gegenbeispiel ist $c : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $c(t) = e^{it}$:

$$\frac{c(2\pi) - c(0)}{2\pi - 0} = 0, \quad \text{aber} \quad |c'(t)| = 1 \text{ für alle } t \in [0, 2\pi].$$

Dennoch können wir auch im vektorwertigen Fall eine Version des Schrankensatzes beweisen.

Folgerung 2.3 (f' beschränkt $\Rightarrow$ f Lipschitz) *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ stetig und auf (a, b) differenzierbar. Falls $|f'(x)| \le L$ für alle $x \in (a, b)$, so folgt*

$$|f(x_1) - f(x_2)| \le L|x_1 - x_2| \quad \text{für alle } x_1, x_2 \in [a, b].$$

BEWEIS: Um die Aussage auf den reellwertigen Fall zu reduzieren, betrachten wir für einen beliebigen Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ mit $|v| = 1$ die Funktion

$$\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}, \ \varphi(x) = \langle v, f(x) \rangle = \sum_{i=1}^{n} v_i f_i(x).$$

Aus der Ungleichung von Cauchy-Schwarz, siehe Satz 5.2 in Kapitel 2, folgt

$$\varphi'(x) = \langle v, f'(x) \rangle \le |v|\,|f'(x)| \le L.$$

Für $x_1, x_2 \in [a, b]$ mit $x_1 > x_2$ erhalten wir aus Folgerung 2.2

$$\langle v, f(x_1) - f(x_2) \rangle = \varphi(x_1) - \varphi(x_2) \le L(x_1 - x_2) = L|x_1 - x_2|.$$

Wir können $f(x_1) \neq f(x_2)$ annehmen, denn sonst ist nichts zu zeigen. Nun wählen wir $v = \big(f(x_1) - f(x_2)\big)/\big|f(x_1) - f(x_2)\big|$, insbesondere $|v| = 1$, und erhalten

$$|f(x_1) - f(x_2)| = \langle f(x_1) - f(x_2), v\rangle \leq L|x_1 - x_2|.$$

□

Wir kommen jetzt zu höheren Ableitungen.

Definition 2.3 *Die k-te Ableitung von $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ in x_0 ist induktiv definiert durch*

$$f^{(k)}(x_0) = \big(f^{(k-1)}\big)'(x_0).$$

Damit $f^{(k)}(x_0)$ definiert ist, müssen also die Ableitungen bis Ordnung $k-1$ in einer Umgebung von x_0 definiert sein, und $f^{(k-1)}$ muss in x_0 differenzierbar sein.

Natürlich schreiben wir f' und f'' statt $f^{(1)}$ bzw. $f^{(2)}$. Mit der zweiten Ableitung gewinnen wir genauere Informationen über lokale Extrema.

Satz 2.5 *Sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar. In $x_0 \in (a,b)$ gelte $f'(x_0) = 0$, und $f''(x_0)$ sei definiert. Dann gilt:*

(1) *Ist $f''(x_0) > 0$, so hat f in x_0 ein isoliertes, lokales Minimum.*

(2) *Hat f in x_0 ein lokales Minimum, so folgt $f''(x_0) \geq 0$.*

Analoge Aussagen gelten mit umgekehrten Ungleichungen für Maxima.

Beweis: Da $f'(x_0) = 0$ nach Voraussetzung, gilt

$$f''(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{x - x_0}.$$

Unter der Voraussetzung (1) gibt es ein $\delta > 0$ mit $f'(x) < 0$ auf $(x_0 - \delta, x_0)$ und $f'(x) > 0$ auf $(x_0, x_0 + \delta)$. Nach Folgerung 2.1 ist f dann streng monoton fallend auf $(x_0 - \delta, x_0)$ und und streng monoton wachsend auf $(x_0, x_0 + \delta)$, hat also in x_0 ein isoliertes, lokales Minimum. Wäre $f''(x_0) < 0$ in (2), so hätte f in x_0 ein isoliertes lokales Maximum im Widerspruch zur Voraussetzung. □

Die Funktion $f(x) = x^4$ zeigt, dass in einem isolierten Minimum $f''(x_0) = 0$ gelten kann. Häufig ist man nicht wirklich an den lokalen Minima, sondern am globalen Minimum interessiert. Dafür ist der Begriff der Konvexität relevant.

Definition 2.4 *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. $f : I \to \mathbb{R}$ heißt konvex, falls gilt:*

$$f\big((1-t)x_0 + tx_1\big) \leq (1-t)f(x_0) + tf(x_1) \quad \forall x_0, x_1 \in I,\ t \in [0,1]. \tag{2.1}$$

Gilt dies mit $\geq$ statt mit $\leq$, so heißt f konkav.

Die Sekante durch $\big(x_0, f(x_0)\big)$ und $\big(x_1, f(x_1)\big)$ hat die Geradengleichung

$$y = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0) =: g(x).$$

An der Stelle $x(t) = (1-t)x_0 + tx_1$ gilt

$$g\big(x(t)\big) = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}\, t(x_1 - x_0) = (1-t)f(x_0) + tf(x_1).$$

Die Konvexität bedeutet also, dass der Graph von f stets unterhalb der Sekanten liegt,

Satz 2.6 (Konvexitätskriterien) *Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(1) *f' ist monoton wachsend auf (a, b).*

(2) *f ist konvex.*

(3) $f(x_1) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0)$ *für alle $x_0, x_1 \in (a, b)$.*

Ist f zweimal differenzierbar auf (a, b), so ist außerdem äquivalent:

(4) $f'' \geq 0$.

Beweis: Wir zeigen (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (1). Sei also (1) erfüllt. Wäre f nicht konvex, so gibt es $x_0, x_1 \in I$ mit der Eigenschaft, dass die stetige Funktion

$$g : [0, 1] \to \mathbb{R},\ g(t) = f\big((1-t)x_0 + tx_1\big) - \big((1-t)f(x_0) + tf(x_1)\big)$$

für gewisse $t \in [0, 1]$ strikt positiv ist. Da $g(0) = g(1) = 0$, nimmt g ein strikt positives Maximum in $t_0 \in (a, b)$ an, siehe Satz 2.1, und es gilt $g'(t_0) = 0$ wegen Satz 2.3. Aber $g'(t)$ ist monoton wachsend, denn es gilt

$$g'(t) = f'\big(x_0 + t(x_1 - x_0)\big) - \big(f(x_1) - f(x_0)\big).$$

Also ist $g'(t) \geq 0$ für $t \geq t_0$, und mit Folgerung 2.1 folgt $g(1) \geq g(t_0) > 0$, Widerspruch.

Sei jetzt f konvex, das heißt für $t \in (0, 1)$ und $x_0, x_1 \in (a, b)$ mit $x_0 \neq x_1$ gilt

$$(x_1 - x_0)\,\frac{f\big(x_0 + t(x_1 - x_0)\big) - f(x_0)}{t(x_1 - x_0)} \leq f(x_1) - f(x_0).$$

Mit $t \searrow 0$ folgt $(x_1 - x_0)f'(x_0) \leq f(x_1) - f(x_0)$, dies ist die behauptete Ungleichung (3). Schließlich setzen wir (3) voraus. Indem wir dort x_0 und x_1 vertauschen und addieren, folgt

$$\big(f'(x_1) - f'(x_0)\big)(x_1 - x_0) \geq 0,$$

womit (1) gezeigt ist. Ist f zweimal differenzierbar, so impliziert $f'' \geq 0$ Bedingung (1) nach Folgerung 2.1, und umgekehrt folgt $f'' \geq 0$ aus (1) einfach durch Betrachtung des Differenzenquotienten. $\square$

Beispiel 2.1 (Youngsche Ungleichung) Für $x, y \geq 0$ gilt die Ungleichung

$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} \qquad \text{falls } p, q \in (1, \infty) \text{ mit } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Dazu betrachten wir für festes $y > 0$ die Funktion

$$f : (0, \infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = xy - \frac{x^p}{p}.$$

Es gilt $f'(x) = y - x^{p-1}$ und $f''(x) = -(p-1)x^{p-2} \leq 0$, das heißt f ist konkav nach Satz 2.6. Aber $f'(x_0) = 0$ für $x_0 = y^{1/(p-1)}$, also folgt mit Satz 2.6(3) wegen $p/(p-1) = q$

$$xy - \frac{x^p}{p} = f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = y^{1/(p-1)}y - \frac{y^{p/(p-1)}}{p} = \frac{y^q}{q}.$$

Definition 2.5 *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $k \in \mathbb{N}_0$. Wir bezeichnen mit $C^k(I)$ den $\mathbb{R}$-Vektorraum der k mal stetig differenzierbaren Funktionen $f : I \to \mathbb{R}$, das heißt*

$$C^k(I) = \{f : I \to \mathbb{R} : f^{(i)} : I \to \mathbb{R} \text{ sind definiert und stetig für } i = 0, 1, \ldots, k\}.$$

Weiter definieren wir $C^\infty(I)$ als den $\mathbb{R}$-Vektorraum der unendlich oft differenzierbaren Funktionen, also ist

$$C^\infty(I) = \bigcap_{k \geq 0} C^k(I).$$

Der Umgang mit C^∞-Funktionen ist besonders angenehm, weil die Klasse im Gegensatz zu den Räumen $C^k(I)$ unter der Bildung von Ableitungen abgeschlossen ist. Es ist klar, dass Polynome unendlich oft differenzierbar sind, ebenso die Exponentialfunktion sowie Cosinus und Sinus. Diese Funktionen sind alle durch konvergente Potenzreihen dargestellt. Wir wollen nun eine Funktion $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ konstruieren, die für $x > 0$ strikt positiv und für $x \leq 0$ gleich Null ist. Eine solche Funktion kann in keiner Umgebung von $x = 0$ durch eine Potenzreihe dargestellt werden, denn ihre Nullstellenmenge hat in $x = 0$ einen Häufungspunkt; nach dem Identitätssatz für Potenzreihen, siehe Satz 4.11 in Kapitel 2, müsste f dann die Nullfunktion sein. Wir brauchen zur Konstruktion folgende Aussagen zum Verhalten von e^x für $x \to \pm\infty$.

Satz 2.7 (Wachstum von $\exp$ und $\log$) *Es gelten folgende Aussagen:*

$$\lim_{x\to\infty} x^{-s} e^x = \infty \quad \text{und} \quad \lim_{x\to\infty} x^s e^{-x} = 0 \quad \text{für jedes } s > 0, \tag{2.2}$$

$$\lim_{y\to\infty} y^{-s} \log y = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{y\searrow 0} y^s \log y = 0 \quad \text{für jedes } s > 0. \tag{2.3}$$

Beweis: Wir wählen $n \in \mathbb{N}$ mit $n > s$ und erhalten für $x \geq 0$

$$x^{-s} e^x = x^{-s} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \geq \frac{x^{n-s}}{n!} \to \infty \quad \text{mit } x \to \infty.$$

Die zweite Aussage in (2.2) ergibt sich durch Übergang zum Kehrwert. Mit der Substitution $x = -s \log y$ folgt weiter für $y \searrow 0$

$$0 = \lim_{x\to\infty} e^{-x} x = \lim_{y\searrow 0} y^s(-s \log y).$$

Setzen wir $y = 1/z$ mit $z \to \infty$, so folgt auch der linke Grenzwert in (2.3). $\square$

Folgerung 2.4 *Die Funktion*

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x \leq 0 \end{cases}$$

ist unendlich oft differenzierbar.

Beweis: Wir zeigen durch Induktion, dass es Polynome p_n gibt mit

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} p_n(\frac{1}{x})\, e^{-1/x} & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x \leq 0. \end{cases}$$

Für $n = 0$ ist das richtig mit $p_0(s) \equiv 1$. Ist die Aussage für ein $n \in \mathbb{N}_0$ gezeigt, so folgt:

$$f^{(n+1)}(x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{x^2}\, p_n(\frac{1}{x}) - \frac{1}{x^2}\, p_n'(\frac{1}{x})\right)\, e^{-1/x} & \text{für } x > 0, \\ 0 & \text{für } x < 0. \end{cases}$$

Für $x \neq 0$ gilt der Induktionsschluss also mit $p_{n+1}(s) = s^2\,(p_n(s) - p_n'(s))$. Zu zeigen bleibt $f^{(n+1)}(0) = 0$. Für den linksseitigen Differenzenquotienten ist das klar, für $x > 0$ berechnen wir mit (2.2)

$$\frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(0)}{x} = \frac{1}{x}\, p_n\Big(\frac{1}{x}\Big)\, e^{-1/x} \to 0 \quad \text{ mit } x \searrow 0.$$

□

Am Schluß beweisen wir noch eine Verallgemeinerung des Mittelwertsatzes, die vor allem bei der Ermittlung von Grenzwerten gute Dienste leistet.

Satz 2.8 (Zweiter Mittelwertsatz der Differentialrechnung) *Seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, f und g differenzierbar auf (a,b). Dann existiert ein $\xi \in (a,b)$ mit*

$$g'(\xi)(f(b) - f(a)) = f'(\xi)(g(b) - g(a)).$$

Beweis: Setze

$$h(x) := (g(x) - g(a))(f(b) - f(a)) - (f(x) - f(a))(g(b) - g(a))$$

für $x \in [a,b]$ und wende den Satz von Rolle an. □

Als Anwendung haben wir die folgende, oft nützliche Regel.

Satz 2.9 (Regel von de l'Hospital)
Seien $f, g : (a,b] \to \mathbb{R}$ differenziebar. Es gelte

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0,$$

$$g(x) \neq 0, \quad g'(x) \neq 0 \quad \text{für } x \in (a,b],$$

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = c.$$

Dann ist

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = c.$$

Beweis: Wir setzen noch $f(a) = g(a) = 0$; dann sind f und g stetige Funktionen auf $[a,b]$. Sei $\epsilon > 0$. Nach Voraussetzung existiert ein $\delta > 0$ mit

$$\left| \frac{f'(y)}{g'(y)} - c \right| < \epsilon \quad \text{ für } y \in (a, a+\delta)$$

Sei jetzt $x \in (a, a+\delta)$. Nach Satz 2.8 existiert ein $\xi \in (a,x)$ mit

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| = \left| \frac{f(\xi)}{g(\xi)} \right|.$$

Es folgt

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - c\right| = \left|\frac{f(\xi)}{g(\xi)} - c\right| < \epsilon.$$

Domit ist

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = c$$

gezeigt. $\square$

Nützlich ist oft auch die folgende Version der Regel von de l'Hospital, bei der Zähler und Nenner des fraglichen Quotienten nicht gegen 0 konvergieren, sondern bestimmt divergieren.

Satz 2.10 *Seien $f, g : (a, b] \to \mathbb{R}$ differenziebar. Es gelte*

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \infty,$$

$$g(x) \neq 0, \quad g'(x) \neq 0 \qquad \textit{für } x \in (a, b],$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = c.$$

Dann ist

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = c.$$

Den Beweis finden Sie in dem Skript von Herrn R. Schneider.

Beispiel 2.2 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1} = 1$. *(Lemma 2.4 in Kapitel 3.)*

Beispiel 2.3 $\lim_{x\to 0} x^s \log x = 0$ *für* $s > 0$. *((2.3) in Satz 2.7)*

$$-x^s \log x = \frac{\log\frac{1}{x}}{x^{-s}} =: \frac{f(x)}{g(x)},$$

$$f'(x) = -\frac{1}{x}, \quad g'(x) = -sx^{-s-1},$$

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{1}{s}x^s, \quad \lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)} = 0.$$

Damit folgt aus der Regel von de l'Hospital

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)} = 0.$$