Kapitel 5

Integralrechnung

1 Das Riemannsche Integral

Das Integral einer nichtnegativen Funktion $f : I = [a, b] \to \mathbb{R}$ ist anschaulich der Flächeninhalt des Gebiets $\{(x, y) : x \in I, 0 < y < f(x)\}$. Allerdings haben wir den Flächeninhalt von Teilmengen des $\mathbb{R}^2$ noch gar nicht definiert, außer vielleicht von einfachen Gebieten wie Rechtecken, so dass die gegebene Beschreibung nicht zur Definition taugen kann. Dennoch lassen wir uns im Folgenden von dieser geometrischen Vorstellung leiten.

Definition 1.1 (Zerlegung) *Eine Zerlegung Z des Intervalls $I = [a, b]$ ist eine geordnete Menge von Punkten $a = x_0 \leq x_1 \leq \ldots \leq x_N = b$. Wir setzen $I_k = [x_{k-1}, x_k]$ sowie $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ für $k = 1, \ldots, N$, und definieren die Feinheit von Z durch*

$$\Delta(Z) = \max_{1 \leq k \leq N} \Delta x_k. \tag{1.1}$$

Definition 1.2 (Riemannsche Summe) *Sei $f : I = [a, b] \to \mathbb{R}$. Die Riemannsche Summe von f zur Zerlegung Z und den Stützstellen $\xi_k \in I_k$ ist*

$$S_{Z,\xi}(f) = \sum_{k=1}^{N} f(\xi_k)\, \Delta x_k \in \mathbb{R}.$$

Die Riemannsche Summe sollte einen Näherungswert für das noch zu definierende Integral darstellen. Eine konkrete Wahl der Zerlegung und der Stützstellen, zum Beispiel die äquidistante Zerlegung mit Intervallmittelpunkten als Stützstellen, führt auf ein numerisches Verfahren zur Approximation des Integrals. Im allgemeinen ist aber nicht gefordert, dass die Zerlegung äquidistant ist, auch können die Stützstellen beliebig in den I_k gewählt werden. Um zu einer sinnvollen Definition zu gelangen, sollte bei Verfeinerung der Zerlegung der Approximationsfehler kleiner werden. Dies führt auf folgenden Begriff der Integrierbarkeit.

Definition 1.3 (Riemann-Integral) *Eine beschränkte Funktion $f : I = [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt (Riemann-)integrierbar mit Integral $S \in \mathbb{R}$, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass für jede Zerlegung Z und jede Wahl ξ der Stützstellen gilt:*

$$\Delta(Z) < \delta \quad \Rightarrow \quad |S_{Z,\xi}(f) - S| < \varepsilon.$$

Wir nennen dann S das (bestimmte) Integral von f auf $[a,b]$ und schreiben

$$S = \int_a^b f \in \mathbb{R}.$$

Beispiel 1.1 Die konstante Funktion $f : I = [a,b] \to \mathbb{R}$, $f(x) = c$, ist integrierbar mit

$$\int_a^b f = c\,(b-a).$$

Denn für jede Zerlegung Z und jede Wahl der $\xi_k \in I_k$ gilt

$$S_{Z,\xi}(f) = \sum_{k=1}^N c\,\Delta x_k = c\,\sum_{k=1}^N (x_k - x_{k-1}) = c\,(b-a).$$

Beispiel 1.2 Die Dirichletfunktion

$$\chi_{\mathbb{Q}} : [0,1] \to \mathbb{R},\ \chi_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{für } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

ist nicht (Riemann-) integrierbar. In jedem I_k mit $\Delta x_k > 0$ gibt es rationale und irrationale Punkte. Für rationale Stützstellen ist $S_{Z,\xi}(\chi_{\mathbb{Q}}) = 1$, für irrationale dagegen $S_{Z,\xi}(\chi_{\mathbb{Q}}) = 0$.

Definition 1.4 (Supremumsnorm) *Für $f : I \to \mathbb{R}$ setzen wir*

$$\|f\|_I = \sup\{|f(x)| : x \in I\}.$$

Die Menge der beschränkten Funktionen auf I, also $\|f\|_I < \infty$, bezeichnen wir mit $\mathcal{B}(I)$.

Die Supremumsnorm hat folgende Eigenschaften, analog zur Euklidischen Norm:

Positivität: $\|f\|_I \geq 0$ mit Gleichheit genau wenn $f = 0$,

Halblinearität: $\|\lambda f\|_I = |\lambda|\,\|f\|_I$ für $\lambda \in \mathbb{R}$.

Dreiecksungleichung: $\|f+g\|_I \leq \|f\|_I + \|g\|_I$.

Satz 1.1 (Linearität des Integrals) *Die Menge $\mathcal{R}(I)$ der Riemann-integrierbaren Funktionen $f : I \to \mathbb{R}$ ist ein Untervektorraum von $\mathcal{B}(I)$ und das Integral $\mathcal{R}(I) \to \mathbb{R}$, $f \mapsto \int_a^b f$, ist ein lineares Funktional. Es gilt also für $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$*

$$\int_a^b (\lambda\, f + \mu\, g) = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g.$$

Beweis: Es gilt $S_{Z,\xi}(\lambda f + \mu g) = \lambda S_{Z,\xi}(f) + \mu S_{Z,\xi}(g)$, also folgt für $\Delta(Z)$ hinreichend klein

$$\Big|S_{Z,\xi}(\lambda f + \mu g) - \Big(\lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g\Big)\Big| \leq |\lambda|\,\Big|S_{Z,\xi}(f) - \int_a^b f\Big| + |\mu|\,\Big|S_{Z,\xi}(g) - \int_a^b g\Big| < \varepsilon.$$

$\square$

Um zu zeigen, dass stetige Funktionen integrierbar sind, gehen wir in drei Schritten vor:

a) Stückweise konstante Funktionen (Treppenfunktionen) sind integrierbar.

b) Läßt sich eine Funktion gut durch integrierbare Funktionen approximieren, so ist sie integrierbar.

c) Stetige Funktionen lassen sich gut durch Treppenfunktionen approximieren, und sind damit integrierbar.

Natürlich ist unter anderem noch zu klären, was die gute Approximation eigentlich sein soll. Wir beginnen unser Programm, indem wir zunächst zwei Eigenschaften des Integrals zeigen.

Lemma 1.1 *Seien $f, \tilde{f} : I \to \mathbb{R}$ mit $\tilde{f}(x) = f(x)$ für alle $x \in I\backslash\{p_1, \ldots, p_r\}$. Mit $f \in \mathcal{R}(I)$ ist dann auch $\tilde{f} \in \mathcal{R}(I)$ und es gilt $\int_a^b \tilde{f} = \int_a^b f$.*

Beweis: Wir zeigen die Aussage im Fall eines Ausnahmepunkts $p \in I$; der allgemeine Fall folgt daraus per Induktion. Es gilt für jede Zerlegung Z mit Stützstellen ξ_k

$$S_{Z,\xi}(\tilde{f}) - S_{Z,\xi}(f) = \sum_{k=1}^{N} (\tilde{f}(\xi_k) - f(\xi_k))\,\Delta x_k = \sum_{\{k:\xi_k = a\}} (\tilde{f}(p) - f(p))\,\Delta x_k.$$

Es ist $\xi_k = p$ höchstens für zwei k mit $\Delta x_k > 0$. Damit schätzen wir ab

$$\begin{aligned} \left|S_{Z,\xi}(\tilde{f}) - \int_a^b f\right| &\leq \left|S_{Z,\xi}(\tilde{f}) - S_{Z,\xi}(f)\right| + \left|S_{Z,\xi}(f) - \int_a^b f\right| \\ &\leq 2\left|\tilde{f}(p) - f(p)\right|\Delta(Z) + \left|S_{Z,\xi}(f) - \int_a^b f\right|, \end{aligned}$$

und die rechte Seite geht gegen Null mit $\Delta(Z) \to 0$. □

Wie Beispiel 1.2 zeigt, ist Lemma 1.1 nicht richtig für eine abzählbare Ausnahmemenge.

Lemma 1.2 *Sei $I = I_1 \cup \ldots \cup I_n$ eine Zerlegung von $I = [a, b]$ in Intervalle $I_k = [a_{k-1}, a_k]$. Ist $f : I \to \mathbb{R}$ auf jedem der Teilintervalle I_k integrierbar, so folgt $f \in \mathcal{R}(I)$ und*

$$\int_a^b f = \sum_{k=1}^{n} \int_{a_{k-1}}^{a_k} f.$$

Beweis: Es reicht den Fall $n = 2$ zu betrachten. Sei $I = I' \cup I''$ mit $I' = [a, p]$ und $I'' = [p, b]$, und sei $f : I \to \mathbb{R}$ integrierbar auf I' und I'', insbesondere $\|f\|_I = \max(\|f\|_{I'}, \|f\|_{I''}) < \infty$. Ist Z eine Zerlegung von I mit Punkten $a = x_0 \leq \ldots \leq x_N = b$ sowie Stützstellen $\xi_1, \ldots, \xi_N$, so gilt $x_{r-1} \leq p < x_r$ für ein $r \in \{1, \ldots, N\}$, und wir definieren Zerlegungen Z',Z'' von I', I'' mit Stützstellen ξ', ξ'' wie folgt:

$$\begin{aligned} Z' &= \{a = x_0 \leq \ldots \leq x_{r-1} \leq p\} \quad \xi' = \{\xi_1, \ldots, \xi_{r-1}, p\}, \\ Z'' &= \{p < x_r \leq \ldots \leq x_N = b\} \quad \xi'' = \{p, \xi_{r+1}, \ldots, \xi_N\}. \end{aligned}$$

Offenbar gilt $\Delta(Z'), \Delta(Z'') \leq \Delta(Z)$. Die Bilanz der Riemannschen Summen lautet

$$|S_{Z,\xi}(f) - \big(S_{Z',\xi'}(f) + S_{Z'',\xi''}(f)\big)| = |(f(\xi_r) - f(p))\,\Delta x_r| \leq 2\,\|f\|_I\,\Delta(Z).$$

Es folgt mit der Dreiecksungleichung

$$\Big|S_{Z,\xi}(f) - \Big(\int_a^p f + \int_p^b f\Big)\Big| \le 2\,\|f\|_I\,\Delta(Z) + \Big|S_{Z',\xi'}(f) - \int_a^p f\Big| + \Big|S_{Z'',\xi''}(f) - \int_p^b f\Big|.$$

Die rechte Seite geht mit $\Delta(Z) \to 0$ gegen Null. □

Folgerung 1.1 *Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine Treppenfunktion, d. h. es gibt eine Unterteilung $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_n = b$ und $c_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, \ldots, n)$ mit $f(x) = c_i$ für alle $x \in (a_{i-1}, a_i)$. Dann ist f integrierbar und es gilt*

$$\int_a^b f = \sum_{i=1}^n (a_i - a_{i-1}) c_i.$$

Beweis: Nach Lemma 1.1 ist $f : [a_{i-1}, a_i] \to \mathbb{R}$ integrierbar für alle $i = 1, \ldots, n$. Aus Lemma 1.2 folgt die Behauptung. □

Damit ist der erste Schritt unseres Programms erledigt. Der zweite Schritt besteht darin, für einen geeigneten Begriff von Konvergenz $f_k \to f$ folgende Aussage zu zeigen:

$$f_k \to f \text{ mit } f_k \text{ integrierbar} \quad \Rightarrow \quad f \text{ integrierbar und } \int_a^b f = \lim_{k\to\infty} \int_a^b f_k.$$

Welcher Konvergenzbegriff ist dabei zu wählen? Zweifellos ist es naheliegend, es mit der punktweisen Konvergenz zu probieren:

$$f_k \to f \text{ punktweise} \quad \Leftrightarrow \quad f_k(x) \to f(x) \quad \text{für alle } x \in I.$$

Aber wie die folgenden Beispiele zeigen, ist die punktweise Konvergenz zu schwach.

Beispiel 1.3 Sei $q_1, q_2, \ldots$ eine Abzählung der rationalen Zahlen in $[0, 1]$. Definiere

$$\chi_n : [0,1] \to \mathbb{R},\ \chi_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in \{q_1, \ldots, q_n\} \\ 0 & \text{sonst .} \end{cases}$$

Die Folge χ_n konvergiert punktweise gegen die Funktion $\chi_{\mathbb{Q}}$, die nach Beispiel 1.2 nicht integrierbar ist.

Beispiel 1.4 Betrachte die Treppenfunktionen

$$f_k : [0,1] \to \mathbb{R},\ f_k(x) = \begin{cases} k & \text{für } 0 < x < \frac{1}{k} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann gilt $\lim_{k\to\infty} f_k(x) = 0$ für alle $x \in [0, 1]$, denn

$$f_k(x) = 0 \quad \begin{cases} \text{für alle } k, & \text{falls } x = 0 \\ \text{für } k \ge \frac{1}{x}, & \text{falls } x > 0. \end{cases}$$

Also konvergiert f_k punktweise gegen $f \equiv 0$. Aber es ist

$$0 = \int_0^1 f \ne \lim_{k\to\infty} \int_0^1 f_k = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \cdot k = 1.$$

Satz 1.2 *Für $f \in \mathcal{R}(I)$ gilt die Ungleichung*

$$\Big| \int_a^b f \Big| \leq |b-a| \, \|f\|_I.$$

Beweis: Für jede Zerlegung Z mit Stützstellen ξ_k gilt mit der Dreiecksungleichung

$$|S_{Z,\xi}(f)| \leq \sum_{k=1}^N |f(\xi_k)| \, \Delta x_k \leq \|f\|_I \sum_{k=1}^N \Delta x_k = |b-a| \, \|f\|_I. \tag{1.2}$$

Die Abschätzung für das Integral folgt. □

Für $f, f_k \in \mathcal{R}(I)$ haben wir nun

$$\Big| \int_a^b f_k - \int_a^b f \Big| = \Big| \int_a^b (f_k - f) \Big| \leq |b-a| \, \|f_k - f\|_I,$$

so dass aus $\|f_k - f\|_I \to 0$ auch die Konvergenz der Integrale folgt. Dies motiviert den folgenden Konvergenzbegriff.

Definition 1.5 (Gleichmäßige Konvergenz) *Die Folge von Funktionen $f_k : I \to \mathbb{R}$ konvergiert gleichmäßig $f : I \to \mathbb{R}$, falls gilt:*

$$\|f_k - f\|_I \to 0 \quad \text{mit } k \to \infty.$$

In Quantorensprache sieht punktweise bzw. gleichmäßige Konvergenz wie folgt aus:

$$\begin{array}{llllll} \forall \varepsilon > 0 & \forall x \in D & \exists N & \forall k > N: & |f_k(x) - f(x)| < \varepsilon & \text{(punktweise)}, \\ \forall \varepsilon > 0 & \exists N & \forall x \in D & \forall k > N: & |f_k(x) - f(x)| < \varepsilon & \text{(gleichmäßig)}. \end{array}$$

Der Unterschied ist, dass bei punktweiser Konvergenz die Schranke N von $x \in I$ abhängen darf, also $N = N(\varepsilon, x)$, während bei gleichmäßiger Konvergenz die Schranke N für alle x gleich gewählt werden kann. Im Beispiel 1.4 gilt etwa, falls $\varepsilon \leq 1$ und $x > 0$,

$$|f_k(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad k \geq \frac{1}{x},$$

so dass $N(\varepsilon, x) \geq 1/x$ sein muss, also nicht unabhängig von x gewählt werden kann. Klar ist, dass gleichmäßige Konvergenz punktweise Konvergenz impliziert. Deshalb kann man in zwei Schritten vorgehen, um eine Funktionenfolge f_k auf gleichmäßige Konvergenz zu prüfen:

(1) Konvergiert die Folge punktweise? Wenn nicht, so erst recht nicht gleichmäßig. Wenn ja, so ist die punktweise Grenzfunktion die einzig mögliche Kandidatin für den gleichmäßigen Grenzwert.

(2) Nun bestimme $\|f_k - f\|_I$ bzw. schätze diese Norm ab. Gilt $\|f_k - f\|_I \to 0$ mit $k \to \infty$, so ist f_k gleichmäßig konvergent gegen f. Wenn nicht, so ist f_k zwar punktweise, aber nicht gleichmäßig konvergent.

Im Beispiel 1.4 gilt $f_k \to f$ mit $f = 0$ punktweise auf $[0,1]$, aber nicht gleichmäßig, denn

$$\sup_{x \in [0,1]} |f_k(x) - f(x)| = k \to \infty \quad \text{mit } k \to \infty.$$

Satz 1.3 (Integral und gleichmäßige Konvergenz) *Konvergiert die Folge $f_k \in \mathcal{R}(I)$ gleichmäßig gegen $f : I \to \mathbb{R}$, also $\|f_k - f\|_I \to 0$, so ist $f \in \mathcal{R}(I)$ und es gilt*

$$\int_a^b f = \lim_{k\to\infty} \int_a^b f_k.$$

Beweis: Die Funktion f ist beschränkt wegen $\|f\|_I \leq \|f - f_k\|_I + \|f_k\|_I < \infty$. Mit $S_k = \int_a^b f_k$ gilt für k, l hinreichend groß nach Satz 1.2

$$|S_k - S_l| \leq |b-a| \, \|f_k - f_l\|_I \leq |b-a| \, (\|f_k - f\|_I + \|f - f_l\|_I) < \varepsilon.$$

Wir setzen $S = \lim_{k\to\infty} S_k$ und zeigen, dass f integrierbar ist mit $\int_a^b f = S$. Für jede Zerlegung Z mit Stützstellen ξ_j und jedes $k \in \mathbb{N}$ haben wir mit (1.2)

$$\begin{aligned} |S_{Z,\xi}(f) - S| &\leq |S_{Z,\xi}(f) - S_{Z,\xi}(f_k)| + |S_{Z,\xi}(f_k) - S_k| + |S_k - S| \\ &\leq (b-a) \, \|f - f_k\|_I + |S_{Z,\xi}(f_k) - S_k| + |S_k - S|. \end{aligned}$$

Zu gegbenem $\varepsilon > 0$ wählen wir erst $k \in \mathbb{N}$ mit $(b-a) \, \|f - f_k\|_I < \varepsilon/3$ und $|S_k - S| < \varepsilon/3$. Für $\Delta(Z) < \delta$ ist dann auch $|S_{Z,\xi}(f_k) - S_k| < \varepsilon/3$, da f_k integrierbar ist. Damit ist der Satz bewiesen. □

Damit ist auch der zweite Schritt unseres Programms abgeschlossen. Es bleibt jetzt nachzuweisen, dass stetige Funktionen $f : I = [a,b] \to \mathbb{R}$ gleichmäßig durch Treppenfunktionen approximiert werden können.

Satz 1.4 *Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ folgenkompakt und $f : D \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist f gleichmäßig stetig, das heißt zu $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ mit*

$$x, x' \in D, \quad |x - x'| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(x')| < \varepsilon. \tag{1.3}$$

Beweis. Andernfalls gibt es für ein $\varepsilon > 0$ Punkte $x_n, x_n' \in D$, so dass gilt:

$$|x_n - x_n'| \to 0, \text{ aber } |f(x_n) - f(x_n')| \geq \varepsilon.$$

Da D kompakt, konvergiert die Folge x_n nach Übergang zu einer Teilfolge gegen ein $x_0 \in D$. Offenbar gilt dann auch $\lim_{n\to\infty} x_n' = x_0$. Da f stetig, ergibt sich der Widerspruch

$$\varepsilon \leq \lim_{n\to\infty} |f(x_n) - f(x_n')| = |f(x_0) - f(x_0)| = 0,$$

□

Beispiel 1.5 Ist $f : D \to \mathbb{R}$ stetig, aber D nicht kompakt, so muss f nicht gleichmäßig stetig sein. Betrachte zum Beispiel $f : (0, \frac{1}{\pi}] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin \frac{1}{x}$. Mit $x_n = (n\pi)^{-1}$, $x_n' = (n\pi + \pi/2)^{-1}$ gilt $x_n, x_n' \to 0$, aber $|f(x_n) - f(x_n')| = 1$ für alle n.

Satz 1.5 *Sei $I = [a,b]$ ein kompaktes Intervall. Dann ist jede stetige Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar.*

Beweis: Wir konstruieren zu $\varepsilon > 0$ eine Treppenfunktion $\varphi : I \to \mathbb{R}$ mit $\|\varphi - f\|_I \leq \varepsilon$. Die Behauptung ergibt sich dann aus Folgerung 1.1 und Satz 1.3. Nach Satz 1.4 gibt es ein $\delta > 0$, so dass gilt:

$$x, x' \in I, \quad |x - x'| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(x')| < \varepsilon.$$

Wähle eine beliebige Zerlegung Z mit Feinheit $\Delta(Z) < \delta$ und den Unterteilungspunkten $a = x_0 \leq \ldots \leq x_N = b$, und setze

$$\varphi(x) = \begin{cases} f(x_k) & \text{für } x \in (x_{k-1}, x_k] \text{ mit } k \in \{1, \ldots, N\}, \\ f(x_0) & \text{für } x = x_0. \end{cases}$$

Ist $x \in (x_{k-1}, x_k]$, so gilt $|x - x_k| < \delta$ und somit $|\varphi(x) - f(x)| = |f(x_k) - f(x)| < \varepsilon$ nach Wahl von δ. Da $\varphi(x_0) = f(x_0)$, folgt insgesamt $\|\varphi - f\|_I \leq \varepsilon$. □

Es ist nützlich, die Integrierbarkeit auch für stückweise stetige Funktionen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ zu haben, das heißt es gibt eine Zerlegung $a = a_0 < \ldots < a_N = b$, so dass f auf jedem Teilintervall $[a_{k-1}, a_k]$ nach eventueller Abänderung in den Endpunkten a_{k-1} und a_k stetig ist. Diese Verallgemeinerung folgt natürlich sofort aus Satz 1.5 und Lemma 1.2.

Während die bisherige Darstellung des Riemannintegrals ohne Änderungen im vektorwertigen Fall zutrifft, spielt bei den folgenden Aussagen die Anordnung von $\mathbb{R}$ eine Rolle.

Satz 1.6 (Monotonie des Integrals) *Sind $f, g \in \mathcal{R}(I)$, so gilt:*

$$f \leq g \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f \leq \int_a^b g.$$

Insbesondere gilt $\int_a^b f \leq \int_a^b |f|$, falls f, $|f| \in \mathcal{R}(I)$.

Beweis: Für jede Zerlegung Z mit Stützstellen ξ_k gilt

$$S_{Z,\xi}(f) = \sum_{k=1}^{N} f(\xi_k) \Delta x_k \leq \sum_{k=1}^{N} g(\xi_k) \Delta x_k = S_{Z,\xi}(g).$$

□

Folgerung 1.2 (Mittelwertsatz der Integralrechnung) *Seien $f, \varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und $\varphi \geq 0$. Dann gibt es ein $\xi \in [a, b]$ mit*

$$\int_a^b f\varphi = f(\xi) \int_a^b \varphi.$$

Im Spezialfall $\varphi = 1$ folgt $\int_a^b f = f(\xi)(b - a)$.

Beweis: Wir können annehmen, dass $\int_a^b \varphi = 1$. Setze $m = \inf_{x \in I} f(x)$ und $M = \sup_{x \in I} f(x)$. Dann gilt $m\varphi \leq f\varphi \leq M\varphi$, also

$$m = \int_a^b m\varphi \leq \int_a^b f\varphi \leq \int_a^b M\varphi = M.$$

Nach dem Zwischenwertsatz gibt es ein $\xi \in [a,b]$ mit $f(\xi) = \int_a^b f\varphi$. $\square$

Der Vollständigkeit halber wollen wir noch eine alternative Definition des Riemann-Integrals erklären. Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt und Z eine Zerlegung von $[a,b]$ in Teilintervalle I_k der Länge Δx_k. Dann sind Ober- und Untersumme von f bzgl. Z definiert durch

$$\overline{S}_Z(f) = \sum_{k=1}^N (\sup_{I_k} f)\,\Delta x_k \quad \text{und} \quad \underline{S}_Z(f) = \sum_{k=1}^N (\inf_{I_k} f)\,\Delta x_k.$$

Nach Definition gilt $\underline{S}_Z(f) \leq \overline{S}_Z(f)$. Nehmen wir zu Z den Unterteilungspunkt $\xi \in [x_{k-1}, x_k]$ hinzu, so folgt mit $I_k' = [x_{k-1}, \xi]$ und $I_k'' = [\xi, x_k]$

$$\begin{aligned}
\underline{S}_{Z\cup\{\xi\}}(f) - \underline{S}_Z(f) &= (\inf_{I_k'} f)\,(\xi - x_{k-1}) + (\inf_{I_k''} f)\,(x_k - \xi) - (\inf_{I_k} f)\,(x_k - x_{k-1}) \\
&= (\inf_{I_k'} f - \inf_{I_k} f)\,(\xi - x_{k-1}) + (\inf_{I_k''} f - \inf_{I_k} f)\,(x_k - \xi).
\end{aligned}$$

Mit $\inf_{I_k'} f, \inf_{I_k''} f, -\inf_{I_k} f \leq \|f\|_I$ sowie $0 \leq x_k - x_{k-1} \leq \Delta(Z)$ erhalten wir

$$0 \leq \underline{S}_{Z\cup\{\xi\}}(f) - \underline{S}_Z(f) \leq 2\|f\|_I\,\Delta(Z),$$

und analog für die Obersummen

$$0 \geq \overline{S}_{Z\cup\{\xi\}}(f) - \overline{S}_Z(f) \geq -2\|f\|_I\,\Delta(Z).$$

Für beliebige Zerlegungen Z, Z' ergibt sich per Induktion

$$\underline{S}_Z(f) \leq \underline{S}_{Z\cup Z'}(f) \leq \overline{S}_{Z\cup Z'}(f) \leq \overline{S}_{Z'}(f). \tag{1.4}$$

Bezeichnet N die Zahl der Teilintervalle von Z', so folgt ebenfalls induktiv

$$\underline{S}_{Z\cup Z'}(f) - 2N\,\|f\|_I\,\Delta(Z) \leq \underline{S}_Z(f) \leq \overline{S}_Z(f) \leq \overline{S}_{Z\cup Z'}(f) + 2N\|f\|_I\,\Delta(Z). \tag{1.5}$$

Wir definieren nun das Ober- bzw. Unterintegral von f durch

$$\begin{aligned}
\overline{S}(f) &= \inf\{\overline{S}_Z(f) : Z \text{ ist Zerlegung von } [a,b]\}, \\
\underline{S}(f) &= \sup\{\underline{S}_Z(f) : Z \text{ ist Zerlegung von } [a,b]\}.
\end{aligned}$$

Aus (1.4) folgt $\underline{S}(f) \leq \overline{S}(f)$.

Satz 1.7 *Eine beschränkte Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist genau dann (Riemann-) integrierbar, wenn ihr Ober- und Unterintegral übereinstimmen, und es gilt dann*

$$\int_a^b f = \underline{S}(f) = \overline{S}(f).$$

Beweis: Ist f Riemannintegrierbar, so folgt für $\Delta(Z) < \delta$

$$\int_a^b f - \varepsilon \leq \inf_\xi S_{Z,\xi}(f) = \underline{S}_Z(f) \leq \underline{S}(f) \leq \overline{S}(f) \leq \overline{S}_Z(f) = \sup_\xi S_{Z,\xi}(f) \leq \int_a^b f + \varepsilon.$$

Umgekehrt sei Z' eine Zerlegung mit $\underline{S}_{Z'}(f) > \underline{S}(f) - \varepsilon/2$, und N sei die Zahl der Teilintervalle von Z'. Für jede Zerlegung Z gilt $\underline{S}_{Z\cup Z'}(f) \geq \underline{S}_{Z'}(f)$, also folgt mit (1.5)

$$S_{Z,\xi}(f) \geq \underline{S}_Z(f) \geq \underline{S}_{Z\cup Z'}(f) - 2N\|f\|_I\,\Delta(Z) > \underline{S}(f) - \varepsilon/2 - 2N\|f\|_I\,\Delta(Z).$$

Für $\Delta(Z) < \delta$ folgt $S_{Z,\xi}(f) > \underline{S}(f) - \varepsilon$. Die Abschätzung nach oben ist analog. $\square$

2 Ableitung und Integral

Wir kommen nun zu dem zentralen, von Newton und Leibniz studierten Zusammenhang zwischen Differentiation und Integration.

Definition 2.1 *Sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}$. Eine differenzierbare Funktion $F : (a,b) \to \mathbb{R}$ heißt Stammfunktion von f, wenn gilt:*

$$F' = f \quad \Leftrightarrow \quad F'(x) = f(x) \quad \text{für alle } x \in (a,b).$$

Satz 2.1 *Ist F eine Stammfunktion von f auf (a,b), so ist jede Stammfunktion von f auf (a,b) von der Form $F + c$, für eine Konstante $c \in \mathbb{R}$.*

Beweis: Sei G auch Stammfunktion von f auf (a,b). Es folgt

$$(G - F)' = G' - F' = f - f = 0.$$

Nach Folgerung 2.1 in Kapitel 4 gibt es eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ mit $G - F = c$, also $G = F + c$. $\square$

Die Gleichung $F' = f$ ist ein elementares Beispiel für eine Differentialgleichung. Folgerung 2.1 sagt aus, dass eine Lösung der Gleichung bis auf eine additive Konstante $c \in \mathbb{R}$ eindeutig bestimmt ist. Es schließt sich hier unmittelbar die Frage nach der Existenz an:

Für welche f ist die Differentialgleichung $F' = f$ auf dem Intervall (a,b) lösbar?

Um die Frage zu beantworten, müssen wir die Definition des Integrals noch etwas erweitern, indem wir für eine Riemann-integrierbare Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ setzen:

$$\int_b^a f := -\int_a^b f \quad \text{und} \quad \int_a^a f = 0.$$

Es folgt dann für beliebige $a, b, c \in \mathbb{R}$, sofern f auf allen Intervallen Riemann-integrierbar ist,

$$\int_a^b f + \int_b^c f = \int_a^c f. \tag{2.1}$$

Für $a \leq b \leq c$ gilt dies nach Lemma 1.2, und allgemein folgt (2.1) dann durch Vertauschung von a, b und c. Weiter verwenden wir im Folgenden die Notation

$$\int_a^b f = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Dies ist unter anderem dann nützlich, wenn die Funktion f außer von x noch von weiteren Variablen $y, z, \ldots$ abhängt, es wird nämlich spezifiziert, bezüglich welcher Variablen integriert werden soll. Außerdem erionnert die Notation an die Riemannschen Summen, mit denen das Integral definiert wurde.

Satz 2.2 (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung) *Sei $f : I = [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist für jedes $x_0 \in I$ die Funktion*

$$F : I \to \mathbb{R}, \quad F(x) = \int_{x_0}^x f(\xi)\,d\xi$$

eine Stammfunktion von f, das heißt es gilt $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in I$.

Bemerkung. In den Endpunkten des Intervalls ist dies im Sinne der einseitigen Ableitungen $F'_+(a) = f(a)$ bzw. $F'_-(b) = f(b)$ zu verstehen.

Beweis: Die Funktion F ist wohldefiniert nach Satz 1.5. Wir berechnen

$$\begin{aligned}\left|\frac{F(x+h)-F(x)}{h} - f(x)\right| &= \frac{1}{|h|}\left|\int_{x_0}^{x+h} f(\xi)\,d\xi - \int_{x_0}^{x} f(\xi)\,d\xi - hf(x)\right| \\ &= \frac{1}{|h|}\left|\int_{x}^{x+h} \big(f(\xi)-f(x)\big)\,d\xi\right| \\ &\le \frac{1}{|h|}\,|h| \sup_{|\xi-x|\le|h|} |f(\xi)-f(x)| \quad \text{(Satz 1.2)}.\end{aligned}$$

Da f im Punkt x stetig ist, geht die rechte Seite mit $h \to 0$ gegen Null. □

Folgerung 2.1 *Sei $f \in C^0(I)$ mit $I = [a,b]$, und $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ sei eine Stammfunktion von f auf I, das heißt $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in [a,b]$*[1]*. Dann gilt für jedes $x_0 \in I$*

$$F(x) = F(x_0) + \int_{x_0}^{x} f(\xi)\,d\xi. \tag{2.2}$$

Beweis: Nach Satz 2.1 und Satz 2.2 gibt es ein $c \in \mathbb{R}$ mit

$$F(x) = c + \int_{x_0}^{x} f(\xi)\,d\xi \quad \text{für alle } x \in (a,b).$$

Weiter ist jede Stammfunktion F von f auf $[a,b]$ stetig in a und b nach Kapitel 4, Satz 1.3. Durch Grenzübergang $x \searrow a$ bzw. $x \nearrow b$ folgt die Gleichung für alle $x \in [a,b]$. Setze nun $x = x_0$ und erhalte $F(x_0) = c$. □

Folgerung 2.2 (Berechnung von bestimmten Integralen mit einer Stammfunktion) *Die Funktion $F : I = [a,b] \to \mathbb{R}$ sei Stammfunktion von $f \in C^0(I)$ auf I. Dann gilt*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) =: \big[F(x)\big]_{x=a}^{x=b}$$

Beweis: Folgt aus (2.2) mit $x_0 = a$, $x = b$. □

Über den Hauptsatz bzw. Folgerung 2.2 lassen sich Differentiationsregeln aus Kapitel 4.1 in Integrationsregeln übersetzen. Dies wird im Folgenden durchgeführt.

Satz 2.3 (Partielle Integration) *Seien $f, g \in C^1(I)$ mit $I = [a,b]$. Dann gilt*

$$\int_a^b fg' = \big[f(x)\,g(x)\big]_{x=a}^{x=b} - \int_a^b f'g.$$

Beweis: Es gilt nach der Produktregel

$$(fg)' = f'g + fg' \quad \text{auf } I = [a,b].$$

Folgerung 2.2 liefert die Behauptung. □

[1] In den Intervallgrenzen bedeutet das $F'_+(a) = f(a)$ bzw. $F'_-(b) = f(b)$.

Satz 2.4 (Substitutions- oder Transformationsregel) *Sei* $I = [a,b]$, $I^* = [\alpha,\beta]$ *und* $\varphi \in C^1(I)$ *mit* $\varphi(I) \subset I^*$. *Dann gilt für* $f \in C^0(I^*)$

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(y)\,dy = \int_a^b f\big(\varphi(x)\big)\varphi'(x)\,dx.$$

Beweis: Wähle nach Satz 2.2 eine Stammfunktion $F \in C^1(I^*)$ von f. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(y)\,dy &= \big[F(y)\big]_{x=\varphi(a)}^{x=\varphi(b)} \quad \text{(Folgerung 2.2)}\\
&= \big[F\big(\varphi(x)\big)\big]_{x=a}^{x=b}\\
&= \int_a^b (F\circ\varphi)'(x)\,dx \quad \text{(Folgerung 2.2)}\\
&= \int_a^b F'\big(\varphi(x)\big)\varphi'(x)\,dx \quad \text{(Kettenregel)}\\
&= \int_a^b f\big(\varphi(x)\big)\,\varphi'(x)\,dx.
\end{aligned}$$

□

Für die Anwendung der Substitutionsregel ist folgendes *Kochrezept* nützlich: bei einem gegebenen Integral $\int_a^b f(y)\,dy$ möchten wir $y = y(x)$ substituieren. Dazu berechnen wir

$$y = y(x) \quad \Rightarrow \quad dy = y'(x)\,dx.$$

Für die Intervallgrenzen bestimmen wir durch Auflösen nach x die Umkehrfunktion

$$x = x(y) \quad \Rightarrow \quad a = x(\alpha),\ b = x(\beta).$$

Damit gilt

$$\int_\alpha^\beta f(y)\,dy = \int_a^b f\big(y(x)\big)\,y'(x)\,dx.$$

Im folgenden zeigen wir an einigen Beispielen, wie die Integrationsregeln angewandt werden. Zunächst erhalten wir direkte Integrationsformeln immer dann, wenn die Stammfunktion bekannt ist. Hier sind einige Beispiele.

Beispiel 2.1

$$\begin{aligned}
\int_a^b x^\alpha\,dx &= \left[\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right]_{x=a}^{x=b} \quad (\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{-1\},\ a,b>0),\\
\int_a^b \frac{dx}{x} &= \big[\log x\big]_{x=a}^{x=b} \quad (a,b>0),\\
\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \big[\arcsin x\big]_{x=a}^{x=b}, \quad (-1<a,b<1).
\end{aligned}$$

Ein Beispiel für die Anwendung der partiellen Integration ist

Beispiel 2.2

$$\int_1^x \log u\,du = \int_1^x 1\cdot \log u\,du = \big[u\log u\big]_{u=1}^{u=x} - \int_1^x u\frac{1}{u}\,du = x\log x - (x-1).$$

Eine schöne Anwendung von Satz 2.3 ist das

Beispiel 2.3 (Wallis-Produkt) Wir berechnen hier $A_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx$. Offenbar gilt

$$A_0 = \pi/2 \quad \text{und } A_1 = \big[-\cos x\big]_{x=0}^{x=\pi/2} = 1.$$

Für $n \geq 1$ leiten wir durch partielle Integration eine Rekursionsformel her:

$$\begin{aligned} A_{n+1} &= \int_0^{\pi/2} \sin x\,\sin^n x\,dx \\ &= \big[\underbrace{-\cos x\,\sin^n x}_{=0}\big]_{x=0}^{x=\pi/2} + n\int_0^{\pi/2} \cos^2 x\,\sin^{n-1} x\,dx \\ &= n\int_0^{\pi/2} \sin^{n-1} x\,dx - n\int_0^{\pi/2} \sin^{n+1} x\,dx, \end{aligned}$$

wobei wir $\cos^2 x = 1-\sin^2 x$ benutzt haben. Es folgt

$$A_{n+1} = \frac{n}{n+1}A_{n-1} \quad (n \geq 1).$$

Durch Induktion erhalten wir

$$\begin{aligned} A_{2n} &= \frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n-3}{2n-2}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{2}\cdot A_0 = \left(\prod_{k=1}^n \frac{2k-1}{2k}\right)\frac{\pi}{2}, \\ A_{2n+1} &= \frac{2n}{2n+1}\cdot\frac{2n-2}{2n-1}\cdot\ldots\cdot\frac{2}{3}\cdot A_1 = \left(\prod_{k=1}^n \frac{2k}{2k+1}\right) 1. \end{aligned}$$

Es folgt weiter

$$\frac{A_{2n}}{A_{2n+1}} = \frac{\pi}{2}\cdot\prod_{k=1}^n \frac{4k^2-1}{4k^2}.$$

Nun gilt $A_{n+1} = \int_0^{\pi/2} \sin^{n+1} x\,dx \leq \int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx = A_n$, und es folgt

$$1 \leq \frac{A_n}{A_{n+1}} \leq \frac{A_{n-1}}{A_{n+1}} = \frac{n+1}{n} \longrightarrow 1.$$

Daraus ergibt sich die Produktdarstellung von Wallis

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{k=1}^\infty \frac{4k^2}{4k^2-1} = \frac{2\cdot 2}{1\cdot 3}\cdot\frac{4\cdot 4}{3\cdot 5}\cdot\ldots$$

Als nächstes behandeln wir Beispiele zur Substitutionsregel.

Beispiel 2.4 (Lineare Parameterwechsel) Mit der Substitution $y = (x - x_0)/m$ haben wir $dy = 1/m\, dx$ und $x = x_0 + my$, also als neue Grenzen $a = x_0 + m\alpha$ und $b = x_0 + m\beta$. Es folgt

$$\int_\alpha^\beta f(y)\, dy = \frac{1}{m} \int_{x_0+m\alpha}^{x_0+m\beta} f\Big(\frac{x - x_0}{m}\Big)\, dx.$$

Beispiel 2.5 (Integration von Ableitungen)

$$\begin{aligned}
\int_a^b \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx &= \int_a^b (\log f)'(x)\, dx = \big[\log f(x)\big]_{x=a}^{x=b} \quad (f > 0),\\
\int_a^b u\sqrt{1+u^2}\, du &= \frac{1}{3}\int_a^b \big((1+u^2)^{\frac{3}{2}}\big)'\, du = \Big[\frac{1}{3}(1+u^2)^{\frac{3}{2}}\Big]_{u=a}^{u=b}.\\
\int_a^b F'\big(f(x)\big) f'(x)\, dx &= \big[F\big(f(x)\big)\big]_{x=a}^{x=b}.
\end{aligned}$$

Beispiel 2.6 (Flächeninhalt unter Hyperbel) Zu berechnen ist das Integral

$$A(x) = \int_1^x \sqrt{u^2 - 1}\, du \qquad \text{für } x \geq 1.$$

Wir substituieren $u = \cosh t$ und erhalten $du = \sinh t\, dt$, $t = \text{Arcosh } u$, also

$$\begin{aligned}
A(x) &= \int_0^{\text{Arcosh } x} \sinh^2 t\, dt\\
&= \frac{1}{4}\int_0^{\text{Arcosh } x} (e^{2t} + e^{-2t} - 2)\, dt\\
&= \Big[\frac{1}{8}(e^{2t} - e^{-2t})\Big]_{t=0}^{t\,=\,\text{Arcosh } x} - \frac{1}{2}\text{Arcosh } x\\
&= \frac{1}{2}\bigg(\Big[\frac{e^t + e^{-t}}{2}\,\frac{e^t - e^{-t}}{2}\Big]_{t=0}^{t\,=\,\text{Arcosh } x} - \text{Arcosh } x\bigg)\\
&= \frac{1}{2}\big(x\sqrt{x^2-1} - \text{Arcosh } x\big).
\end{aligned}$$

Für rationale Funktionen, also Quotienten von Polynomen, hat man ein spezielles Integrationsverfahren, die Partialbruchzerlegung, die wir hier nur an einem Beispiel vorführen:

Beispiel 2.7 (Partialbruchzerlegung) Um das Integral $\int_{-1/2}^{1/2} \frac{dx}{1-x^2}$ zu berechnen, machen wir den Ansatz

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{(1+x)(1-x)} \stackrel{!}{=} \frac{A}{1-x} + \frac{B}{1+x} = \frac{(A-B)x + (A+B)}{1-x^2}.$$

Der Koeffizientenvergleich ergibt $A = B = 1/2$, also folgt

$$\int_{-1/2}^{1/2} \frac{dx}{1-x^2} = \int_{-1/2}^{1/2} \Big(\frac{1/2}{1-x} + \frac{1/2}{1+x}\Big)\, dx = \frac{1}{2}\Big[\log\frac{1+x}{1-x}\Big]_{x=-\frac{1}{2}}^{x=\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(\log 3 - \log 1/3) = \log 3.$$

Bei der Definition des Riemannschen Integrals ist das Definitionsintervall $I = [a, b]$ nach Voraussetzung kompakt. Wir wollen ganz kurz erläutern, wie auch unendliche Integrationsintervalle $-\infty \leq a < b \leq \infty$ und in den Intervallgrenzen unbeschränkte Funktionen im Rahmen des Riemann-Integrals behandelt werden können.

Definition 2.2 (uneigentliches Riemann-Integral) *Sei $I = [a, b)$ mit $a < b \leq \infty$. Die Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ sei Riemann-integrierbar auf $[a, b']$ für alle $b' < b$. Falls $\lim_{x \nearrow b} \int_a^x f(\xi)\, d\xi$ existiert, so heißt das Integral $\int_a^b f(\xi)\, d\xi$ konvergent (oder existent) und wir setzen*

$$\int_a^b f(\xi)\, d\xi = \lim_{x \nearrow b} \int_a^x f(\xi)\, d\xi.$$

Die Konvergenzaussagen für das uneigentliche Integral sind analog zu den Konvergenzkriterien für Reihen. Das folgende Lemma entspricht dabei dem Cauchykriterium.

Lemma 2.1 *In der Situation von Definition 2.2 ist $\int_a^b f$ genau dann konvergent, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $b' < b$ gibt mit*

$$\Big| \int_{x_1}^{x_2} f \Big| < \varepsilon \quad \textit{für alle } x_1, x_2 > b'.$$

Beweis: Setze $F(x) = \int_a^x f$ für $x \in [a, b)$. Existiert das uneigentliche Integral, das heißt $F(x) \to S$ mit $x \nearrow b$, so gibt es ein $b' < b$ mit $|F(x) - S| < \varepsilon/2$ für $x > b'$ und es folgt

$$|F(x_1) - F(x_2)| \leq |F(x_1) - S| + |F(x_2) - S| < \varepsilon \quad \text{für } x_{1,2} > b'.$$

Umgekehrt wählen wir eine Folge $x_k \nearrow b$. Nach Voraussetzung ist dann $F(x_k)$ Cauchyfolge, das heißt $S = \lim_{k \to \infty} F(x_k)$ existiert. Aber dann folgt sogar $\lim_{x \nearrow b} F(x) = S$. □

Hier sind einige Beispiele von uneigentlichen Riemann-Integralen.

Beispiel 2.8

$$\int_1^\infty x^\alpha\, dx = \begin{cases} \lim_{R \nearrow \infty} \left[\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right]_{x=1}^{x=R} = -\dfrac{1}{\alpha+1} & \text{für } \alpha < -1, \\ \text{divergent} & \text{für } \alpha \geq -1. \end{cases}$$

$$\int_0^1 x^\alpha\, dx = \begin{cases} \text{divergent} & \text{für } \alpha \leq -1, \\ \lim_{\varepsilon \searrow 0} \left[\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right]_{x=\varepsilon}^{x=1} = \dfrac{1}{\alpha+1} & \text{für } \alpha > -1. \end{cases}$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{x \nearrow 1} \int_0^x \frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} = \lim_{x \nearrow 1} \arcsin x = \pi/2.$$

In den vorangegangenen Beispielen sind die Integranden positiv. Das uneigentliche Integral $\int_a^b f$ heißt absolut konvergent, wenn $\int_a^b |f|$ konvergiert. Aus Lemma 2.1 folgt sofort, dass ein absolut konvergentes Integral konvergiert. Wie bei Reihen impliziert die Konvergenz aber nicht umgekehrt die absolute Konvergenz. Ein simples Beispiel ist das uneigentliche Integral $\int_1^\infty f(x)\, dx$, wobei

$$f(x) = \frac{(-1)^{k-1}}{k} \text{ für } k = [x].$$

Für die Existenz des uneigentlichen Integrals auf einem beidseitig offenen Intervall (a,b) wählt man einen Zwischenpunkt $c \in (a,b)$ und verlangt die Existenz der Integrale auf $(a,c]$ und $[c,b)$. Das Integral über (a,b) ergibt sich dann als Summe. Es ist leicht zu sehen, dass diese Definition nicht von der Wahl des Zwischenpunkts c abhängt. Ein Beispiel ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi.$$

3 Vertauschungssätze für konvergente Folgen von Funktionen

In diesem Abschnitt betrachten wir Folgen $f_n : I \to \mathbb{R}$ von Funktionen, die punktweise gegen eine Grenzfunktion $f : I \to \mathbb{R}$ konvergieren, das heißt

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \quad \text{für alle } x \in I.$$

Wir interessieren uns dafür, unter welchen Voraussetzungen sich die Stetigkeit bzw. Differenzierbarkeit der Funktionen f_n auf die Grenzfunktion f überträgt. Ein wichtiger Fall ist die Frage, ob eine reelle Potenzreihe $P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ innerhalb des Konvergenzintervalls $(-R,R)$ eine differenzierbare Funktion darstellt. Hier ist klar, dass die approximierenden Polynome $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ differenzierbar sind mit Ableitung

$$P_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) a_{k+1} x^k.$$

Wir werden zeigen, dass $P(x)$ auf $(-R,R)$ differenzierbar ist und dass gilt

$$P'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} x^k.$$

Dies bedeutet, dass die Potenzreihe gliedweise differenziert werden kann, das heißt die Ableitung kann mit dem Grenzwert $n \to \infty$ der Reihe vertauscht werden. Bei der Exponentialfunktion konnten wir die Frage der Stetigkeit und Differenzierbarkeit in $x \in \mathbb{R}$ mithilfe der Funktionalgleichung auf den Fall $x = 0$ reduzieren, wo wir dann die Abschätzung aus Satz 4.7 zur Verfügung hatten. Für eine allgemeine Potenzreihe haben wir kein Äquivalent der Funktionalgleichung und brauchen deshalb allgemeinere Resultate.

Die punktweise Konvergenz ist im allgemeinen nicht einmal ausreichend für die Stetigkeit der Grenzfunktion – hier zwei typische Beispiele.

Beispiel 3.1 Die Folge $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n$, konvergiert mit $n \to \infty$ punktweise gegen die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leq x < 1, \\ 1 & \text{für } x = 1. \end{cases}$$

Die Folge $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \arctan(nx)$, konvergiert punktweise gegen

$$f(x) = \begin{cases} \pi/2 & \text{für } x > 0 \\ -\pi/2 & \text{für } x < 0 \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Satz 3.1 (Gleichmäßige Konvergenz und Stetigkeit) *Seien $f_n : D \to \mathbb{R}^p$, $n \in \mathbb{N}$, stetige Funktionen auf $D \subset \mathbb{R}^m$, die gleichmäßig gegen $f : D \to \mathbb{R}^p$ konvergieren, das heißt*

$$\|f_n - f\|_D = \sup_{x \in D} |f_n(x) - f(x)| \to 0 \quad \textit{mit } n \to \infty.$$

Dann ist f ebenfalls stetig auf D.

Beweis: Sei $x_0 \in D$ gegeben. Für beliebige $x \in D$, $n \in \mathbb{N}$ gilt die Abschätzung

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| \\ &\leq 2\,\|f - f_n\|_D + |f_n(x) - f_n(x_0)|. \end{aligned}$$

Zu $\varepsilon > 0$ wählen wir erst $n \in \mathbb{N}$ mit $\|f - f_n\|_D < \varepsilon/3$, dann $\delta > 0$ mit $|f_n(x) - f_n(x_0)| < \varepsilon/3$ für $|x - x_0| < \delta$. Es folgt $|f(x) - f(x_0)| < 2\varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon$ für $|x - x_0| < \delta$. □

Folgerung 3.1 *Sei $P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$ und n-ten Partialsummen $P_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$. Dann konvergiert P_n gleichmäßig gegen P auf jeder Kreisscheibe $B_\varrho(0) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < \varrho\}$ mit $\varrho < R$, und P ist stetig auf $B_R(0)$.*

Beweis: Wähle $r \in (\varrho, R)$. Nach der Definition des Konvergenzradius in Satz 4.10 konvergiert $P(z)$ für $z = r$, also ist $a_k r^k$ eine Nullfolge und es gibt ein $M \in [0, \infty)$ mit $|a_k| r^k \leq M$. In dieser Situation liefert Lemma 4.2 die Abschätzung

$$\|P - P_n\|_{B_\varrho(0)} = \sup_{|z| < \varrho} |P(z) - P_n(z)| \leq \frac{M}{1 - \frac{\varrho}{r}} \left(\frac{\varrho}{r}\right)^{n+1} \to 0 \quad \text{mit } n \to \infty.$$

Dies beweist die gleichmäßige Konvergenz auf $B_\varrho(0)$. Nach Satz 3.1 ist P somit stetig auf $B_\varrho(0)$ für alle $\varrho < R$, also auf ganz $B_R(0)$. □

Jetzt kommen wir zur Frage der Differenzierbarkeit der Grenzfunktion.

Satz 3.2 (Vertauschung von Konvergenz und Ableitung) *Sei $f_n \in C^1(I)$ eine Folge von Funktionen auf $I = (a, b)$, die punktweise gegen $f : I \to \mathbb{R}$ konvergiert. Falls die Folge f_n' gleichmäßig gegen $g : I \to \mathbb{R}$ konvergiert, so ist $f \in C^1(I)$ und $f' = g$.*

Beweis: Für $x_0 \in I$ gilt nach Satz 2.2, dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung,

$$f_n(x) = f_n(x_0) + \int_{x_0}^{x} f_n'(\xi)\, d\xi \quad \text{für alle } x \in I.$$

Da f_n' gleichmäßig gegen g konvergiert, folgt nach Satz 1.3 mit $n \to \infty$

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} g(\xi)\, d\xi \quad \text{für alle } x \in I.$$

Die Funktion g ist stetig nach Satz 3.1, also folgt aus dem Hauptsatz $f \in C^1(I)$ und $f' = g$. □

Für Funktionen $f : I \to \mathbb{R}^p$ oder $f : I \to \mathbb{C}$ gilt der Satz entsprechend. Dies ergibt sich sofort durch Anwendung auf die einzelnen Koordinatenfunktionen, vgl. Lemma 1.1 in Kapitel 4. Um den Satz auf Potenzreihen anzuwenden, brauchen wir folgende Hilfsaussage.

Lemma 3.1 *Sei $P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ eine komplexe Potenzreihe mit Konvergenzradius $R \in [0,\infty]$. Dann hat die formal differenzierte Reihe*

$$Q(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k z^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} z^k$$

denselben Konvergenzradius R.

Beweis: Es gilt $|a_k z^k| \leq |k a_k z^{k-1}| \cdot |z|$ für $k \geq 1$, also hat $Q(z)$ höchstens den Konvergenzradius R. Zu $r \in (0,R)$ gibt es ein $M \in [0,\infty)$ mit $|a_k| r^k \leq M$, da $P(r)$ konvergiert. Es folgt für alle $z \in B_r(0)$

$$|k a_k z^{k-1}| = k |a_k| r^k \, \frac{|z|^{k-1}}{r^k} \leq \frac{kM|z|^{k-1}}{r^k}.$$

Die rechte Reihe konvergiert aber nach dem Quotientenkriterium, denn

$$\frac{(k+1)M|z|^k}{r^{k+1}} \left(\frac{kM|z|^{k-1}}{r^k} \right)^{-1} = \frac{(k+1)|z|}{kr} \to \frac{|z|}{r} < 1 \quad \text{mit } k \to \infty.$$

Also ist $Q(z)$ für $z \in B_R(0)$ absolut konvergent. □

Satz 3.3 (Differenzierbarkeit von Potenzreihen) *Die Potenzreihe $P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ mit $a_k \in \mathbb{C}$ habe den Konvergenzradius $R > 0$. Dann ist die Funktion*

$$P : (-R,R) \to \mathbb{C},\ P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

differenzierbar, und ihre Ableitung ergibt sich durch gliedweise Differentiation:

$$P'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} x^k \quad \textit{für alle } x \in (-R,R). \tag{3.1}$$

Beweis: Die Funktionen $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ konvergieren auf $(-R,R)$ punktweise gegen $P(x)$, und nach Lemma 3.1 und Folgerung 3.1 konvergieren die P_n' lokal gleichmäßig, das heißt gleichmäßig auf jedem Teilintervall $(-\varrho,\varrho) \subset (-R,R)$ mit $0 < \varrho < R$, gegen die stetige Funktion $Q : (-R,R) \to \mathbb{R}$, $Q(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}$. Die Behauptung folgt nun aus Satz 3.2. □

Jetzt stehen alle Hilfsmittel zur Verfügung, um einige interessante Potenzreihenentwicklungen herzuleiten.

Beispiel 3.2 Für $x \in (-1,1) \subset \mathbb{R}$ gilt die Reihendarstellung

$$\log(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - + \ldots.$$

Denn die Reihe $P(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k$ konvergiert für $x \in (-1,1)$ nach dem Quotientenkriterium, also folgt aus Satz 3.3 und der Formel für die geometrische Reihe

$$P'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k = \frac{1}{1+x} \qquad \text{für } x \in (-1,1).$$

Wegen $P(0) = 0 = \log 1$ ergibt sich $P(x) = \log(1+x)$.

Beispiel 3.3 Ähnlich zeigen wir für $x \in (-1,1) \subset \mathbb{R}$ die Reihenentwicklung

$$\arctan x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - + \ldots.$$

Denn $P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1}$ konvergiert für $x \in (-1,1)$ nach dem Quotientenkriterium, und Satz 3.3 liefert

$$P'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k} = \frac{1}{1+x^2} \qquad \text{für } x \in (-1,1).$$

Wegen $P(0) = 0 = \arctan 0$ ergibt sich $P(x) = \arctan x$.

Beispiel 3.4 Die Binomialreihe mit Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$ ist definiert durch

$$B_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} z^k.$$

Die Reihe hat Konvergenzradius $R = 1$, siehe Beispiel 4.6 in Kapitel 2. Für $x \in (-1,1)$ berechnen wir mit Satz 3.3

$$B_\alpha'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \binom{\alpha}{k+1} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \frac{\alpha - k}{k+1} \binom{\alpha}{k} x^k = \alpha B_\alpha(x) - x B_\alpha'(x),$$

das heißt $B_\alpha'(x) = \dfrac{\alpha}{1+x} B_\alpha(x)$. Es folgt mit $f(x) = (1+x)^{-\alpha}$

$$(f B_\alpha)'(x) = f'(x) B_\alpha(x) + f(x) B_\alpha'(x) = f(x) B_\alpha(x) \Big(-\frac{\alpha}{1+x} + \frac{\alpha}{1+x} \Big) = 0.$$

Wegen $B_\alpha(0) = 1 = f(0)$ ergibt sich die folgende Darstellung (Newton 1665)

$$(1+x)^\alpha = B_\alpha(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k \qquad \text{für alle } x \in (-1,1).$$

In der Physik wird oft die Näherung $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x$ benutzt, für $|x| << 1$.

Satz 3.4 (Abelscher Grenzwertsatz) *Ist die Potenzreihe $P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ für $x = 1$ konvergent, so gilt*

$$\lim_{x \nearrow 1} P(x) = P(1).$$

Beweis: Nach Voraussetzung hat P Konvergenzradius $R \geq 1$. Wir berechnen mit $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ für $0 \leq x < 1$

$$\begin{aligned}
P_n(1) - P_n(x) &= \sum_{k=0}^{n} a_k (1 - x^k) \\
&= (1-x) \sum_{k=0}^{n} a_k \sum_{j=0}^{k-1} x^j \\
&= (1-x) \sum_{j=0}^{n-1} x^j \sum_{k=j+1}^{n} a_k \\
&= (1-x) \sum_{j=0}^{n-1} x^j \big(P_n(1) - P_j(1) \big).
\end{aligned}$$

Zu $\varepsilon > 0$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|P_n(1) - P_j(1)| < \varepsilon/2$ für $j, n > N$, also gilt

$$(1-x) \sum_{j=N+1}^{n-1} x^j \, |P_n(1) - P_j(1)| \leq (1-x)\,\frac{\varepsilon}{2} \sum_{j=N+1}^{\infty} x^j \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Es folgt

$$|P_n(1) - P_n(x)| \leq (1-x) \sum_{j=0}^{N} |P_n(1) - P_j(1)| + \frac{\varepsilon}{2},$$

und schließlich mit $n \to \infty$

$$|P(1) - P(x)| \leq (1-x) \sum_{j=0}^{N} |P(1) - P_j(1)| + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

für x hinreichend nahe bei Eins. □

Beispiel 3.5 Nach dem Leibnizkriterium konvergiert die Reihe $x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 \pm \ldots$ auch für $x = 1$, also folgt aus Satz 3.4 (Mercator 1668)

$$\log 2 = \lim_{x \nearrow 1} \log(1+x) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - + \ldots.$$

Ebenso konvergiert die Reihe des arctan auch für $x = 1$, und es ergibt sich die Darstellung (Gregory 1671, Leibniz 1674)

$$\frac{\pi}{4} = \arctan 1 = \lim_{x \nearrow 1} \arctan x = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - + \ldots.$$