Zu $\varepsilon > 0$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|P_n(1) - P_j(1)| < \varepsilon/2$ für $j, n > N$, also gilt

$$(1-x) \sum_{j=N+1}^{n-1} x^j \, |P_n(1) - P_j(1)| \leq (1-x) \frac{\varepsilon}{2} \sum_{j=N+1}^{\infty} x^j \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Es folgt

$$|P_n(1) - P_n(x)| \leq (1-x) \sum_{j=0}^{N} |P_n(1) - P_j(1)| + \frac{\varepsilon}{2},$$

und schließlich mit $n \to \infty$

$$|P(1) - P(x)| \leq (1-x) \sum_{j=0}^{N} |P(1) - P_j(1)| + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

für x hinreichend nahe bei Eins. $\square$

Beispiel 3.5 Nach dem Leibnizkriterium konvergiert die Reihe $x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 \pm \ldots$ auch für $x = 1$, also folgt aus Satz 3.4 (Mercator 1668)

$$\log 2 = \lim_{x \nearrow 1} \log(1+x) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - + \ldots.$$

Ebenso konvergiert die Reihe des arctan auch für $x = 1$, und es ergibt sich die Darstellung (Gregory 1671, Leibniz 1674)

$$\frac{\pi}{4} = \arctan 1 = \lim_{x \nearrow 1} \arctan x = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - + \ldots.$$

4 Die Taylorentwicklung

Als Anwendung führen wir die Taylorentwicklung ein. Die Idee der Taylorentwicklung ist es, eine gegebene Funktion f mit einem Polynom zu vergleichen, das an einer festen Stelle x_0 mit f „von höherer Ordnung“ übereinstimmt, das heißt einschließlich einer Reihe von Ableitungen.

Lemma 4.1 *Sei $I = (a,b) \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in I$ und $n \in \mathbb{N}_0$. Zu $f \in C^n(I)$ gibt es genau ein Polynom $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vom Grad höchstens n mit $P^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0)$ für $k = 0, 1, \ldots, n$, und zwar*

$$P(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!} (x - x_0)^j. \tag{4.1}$$

Das Polynom P heißt Taylorpolynom n-ten Grades von f mit Entwicklungspunkt x_0 und wird mit $P^n_{x_0} f$ bezeichnet.

Beweis: Es gilt $\left(\frac{d}{dx}\right)^k (x - x_0)^j \,|_{x=x_0} = k! \, \delta_{jk}$. Daraus ergibt sich allgemein für $k \leq n$

$$P(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j (x - x_0)^j \Rightarrow P^{(k)}(x_0) = k! \, a_k. \tag{4.2}$$

Für P wie in (4.1) gilt $a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$, also folgt $P^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0)$ und P leistet das Verlangte.

Für die Eindeutigkeit reicht es aus zu zeigen, dass ein Polynom P vom Grad höchstens n mit $P^{(k)}(x_0) = 0$ für $k = 0, 1, \ldots, n$ das Nullpolynom ist. Nun gilt

$$x^k = (x_0 + x - x_0)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} x_0^{k-i}(x - x_0)^i.$$

Also gilt $P(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j (x - x_0)^j$ mit geeigneten $a_j \in \mathbb{R}$, und aus (4.2) folgt $a_j = \frac{1}{j!} P^{(j)}(x_0) = 0$. Somit ist P das Nullpolynom. $\square$

Folgerung 4.1 *Ist f ein Polynom vom Grad höchstens n, so gilt $P^n_{x_0} f = f$, das heißt das n-te Taylorpolynom von f ist f selbst.*

Definition 4.1 *Für $f \in C^n(I)$ und $x_0 \in I$ heißt die Funktion*

$$R^n_{x_0} f : (a, b) \to \mathbb{R}, \quad R^n_{x_0} f(x) = f(x) - P^n_{x_0} f(x)$$

Restglied der Taylorentwicklung n-ter Ordnung mit Entwicklungspunkt x_0.

Knackpunkt bei der Taylorentwicklung ist die Abschätzung des Restglieds; diese besagt, wie gut die Funktion f durch das Taylorpolynom $P^n_{x_0} f$ approximiert wird. Entscheidend für die Abschätzung sind die in den folgenden beiden Sätzen gelieferten Darstellungen.

Satz 4.1 (Integraldarstellung des Restglieds) *Sei $f \in C^{n+1}(I)$ für ein $n \in \mathbb{N}_0$ und $x_0 \in I$. Dann hat das Restglied $R^n_{x_0} f(x) = f(x) - P^n_{x_0} f(x)$ die Darstellung*

$$R^n_{x_0} f(x) = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^{x} (x - y)^n f^{(n+1)}(y)\, dy. \tag{4.3}$$

Beweis: Durch Induktion über $n \in \mathbb{N}_0$. Der Fall $n = 0$ folgt aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung:

$$R^0_{x_0} f(x) = f(x) - f(x_0) = \int_{x_0}^{x} f'(y)\, dy.$$

Der Induktionsschritt $n - 1 \Rightarrow n \geq 1$ beruht auf partieller Integration:

$$\begin{aligned}
R^n_{x_0} f(x) &= R^{n-1}_{x_0} f(x) - \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \quad (\text{Definition } R^n_{x_0}) \\
(\text{Induktion}) &= \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^{x} (x - y)^{n-1} f^{(n)}(y)\, dy - \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \\
(\text{part. Int.}) &= \frac{1}{(n-1)!} \left[-\frac{(x - y)^n}{n} f^{(n)}(y) \right]_{y=x_0}^{y=x} + \frac{1}{n!} \int_{x_0}^{x} (x - y)^n f^{(n+1)}(y)\, dy \\
&\quad - \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \\
&= \frac{1}{n!} \int_{x_0}^{x} (x - y)^n f^{(n+1)}(y)\, dy.
\end{aligned}$$

$\square$

Satz 4.2 (Lagrangedarstellung des Restglieds) *Unter den Voraussetzungen von Satz 4.1 existiert ein* $\xi \in [x_0, x]$ *(bzw.* $\xi \in [x, x_0]$ *für* $x \le x_0$*), so dass gilt:*

$$R^n_{x_0} f(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}. \tag{4.4}$$

Beweis: Sei $x \ge x_0$ (sonst analog). Dann ist $(x-y)^n \ge 0$ auf $[x_0, x]$. Nach dem MWS der Integralrechnung (Folgerung 1.2) existiert ein $\xi \in [x_0, x]$ mit

$$R^n_{x_0} f(x) = f^{(n+1)}(\xi) \int_{x_0}^{x} \frac{(x-y)^n}{n!}\, dy = f^{(n+1)}(\xi)\, \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$$

□

Beispiel 4.1 *Betrachte für* $x \in (-1, 1)$ *die Funktion*

$$\begin{aligned} f(x) &= (1-x)^{-1/2}, & f(0) &= 1 \\ f'(x) &= \tfrac{1}{2}(1-x)^{-3/2}, & f'(0) &= 1/2 \\ f''(x) &= \tfrac{3}{4}(1-x)^{-5/2}, & f''(0) &= 3/4. \end{aligned}$$

Das Taylorpolynom erster Ordnung bei $x_0 = 0$ *lautet*

$$P^1_0 f(x) = \sum_{k=0}^{1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = 1 + \frac{1}{2}x,$$

mit der Lagrange-Restglieddarstellung

$$R^1_0 f(x) = \frac{f''(\xi)}{2} x^2 = \frac{3}{8}(1-\xi)^{-5/2} x^2 \quad \textit{mit } \xi \in [0, x].$$

Definition 4.2 *Für* $f \in C^\infty(I)$ *und* $x_0 \in I$ *heißt die Reihe*

$$P_{x_0} f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

Taylorreihe von f *mit Entwicklungspunkt* x_0*.*

Die Taylorreihe ist eine Potenzreihe, mit Entwicklungspunkt $x_0 \in \mathbb{R}$. Insbesondere hat sie einen Konvergenzradius $R \in [0, +\infty]$:

$$\begin{aligned} |x - x_0| &< R \;\Rightarrow\; \text{absolute Konvergenz} \\ |x - x_0| &> R \;\Rightarrow\; \text{Divergenz} \end{aligned}$$

Selbst wenn die Taylorreihe einen positiven Konvergenzradius hat, muss sie nicht notwendig gegen die gegebene Funktion konvergieren.

Beispiel 4.2 *Betrachte* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *mit*

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \textit{für } x > 0 \\ 0 & \textit{für } x \le 0 \end{cases}$$

Dann gilt $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ *und* $f^{(k)}(0) = 0$ *für alle* $k \in \mathbb{N}_0$*, siehe Folgerung 2.6 in Kapitel 3. Damit sind alle Koeffizienten der Taylorreihe Null und diese konvergiert gegen die Nullfunktion, nicht gegen* f*.*

Definition 4.3 *Eine Funktion $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ heißt analytisch, wenn es zu jedem $x_0 \in (a,b)$ eine Umgebung $U_\delta(x_0) \subset (a,b)$ gibt, auf der die Funktion f als Potenzreihe mit Entwicklungspunkt x_0 darstellbar ist.*

Satz 4.3 *Seien $a_k \in \mathbb{R}$ für $k \in \mathbb{N}_0$. Für $f : I = (a,b) \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in I$ sind folgende Aussagen äquivalent:*

(1) *f besitzt auf I die Potenzreihendarstellung*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k \quad \textit{für alle } x \in I.$$

(2) *$f \in C^\infty(I)$, $a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$ und für alle $x \in I$ gilt $R^n_{x_0} f(x) \to 0$ mit $n \to \infty$.*

Beweis: (1) $\Rightarrow$ (2) : Nach Voraussetzung gilt für den Konvergenzradius der Potenzreihe

$$R \geq \max(|x_0 - a|, |x_0 - b|).$$

Nach Satz 3.3 ist $f \in C^\infty(I)$ und die Ableitungen können durch gliedweise Differentiation berechnet werden. Also folgt

$$f^{(k)}(x_0) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \, k! \, \delta_{jk} = k! a_k.$$

Folglich ist die Potenzreihe die Taylorreihe von f mit Entwicklungspunkt x_0, und es folgt

$$R^n_{x_0} f(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k \, x^k \to 0 \quad \text{nach Voraussetzung.}$$

(2) $\Rightarrow$ (1) : Nach Voraussetzung gilt für $n \in \mathbb{N}_0$

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k + \underbrace{R^n_{x_0} f(x)}_{\to 0 \text{ mit } n \to \infty} \\ \Rightarrow \quad f(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k. \end{aligned}$$

□

Beispiel 4.3 *Mit Hilfe der Restgliedabschätzung können wir erneut die Potenzreihendarstellung der Funktionen* exp, cos *und* sin *beweisen. Wir betrachten zum Beispiel $f(x) = \cos x$. Es gilt dann*

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} (-1)^k \cos x & n = 2k \\ (-1)^k \sin x & n = 2k - 1 \end{cases}.$$

Insbesondere

$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} (-1)^k & n = 2k \\ 0 & n = 2k - 1 \end{cases}.$$

Die Taylorreihe mit Entwicklungspunkt Null lautet also

$$P_0 f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}\, x^{2k}.$$

Für das Restglied folgt mit Lagrange

$$R_0^{2k} f(x) = \frac{(-1)^{k+1}\, \sin\xi}{(2k+1)!}\, x^{2k+1} \to 0 \quad \textit{mit } k \to \infty.$$