

A N A L Y S I S I

WS 2011/2012

Basierend auf einem Skript von E. Kuwert

Guofang Wang

Mathematisches Institut
Universität Freiburg

Inhaltsverzeichnis

1	Grundlagen	1
0	Mengenlehre und Abbildungen	1
0.1	Etwas Mengenlehre	1
0.2	Abbildungen	3

Kapitel 1

Grundlagen

0 Mengenlehre und Abbildungen

0.1 Etwas Mengenlehre

Georg Cantor: Eine Menge ist die ungeordnete Zusammenfassung verschiedener Elemente zu einem Ganzen.

Bezeichnung. Ist M eine solche Menge, so führen wir die folgenden Bezeichnungen ein:

$$a \in M$$

heißt: “ a ist Element von M ” (oder: “ a gehört zu M ”, “ a liegt in M ”, “ a ist aus M ”).

$$a \notin M$$

heißt: “ a ist nicht Element von M ”.

$$M = \{a, b, \dots\}$$

heißt: “ M ist die Menge, die aus den Elementen a, b usw. besteht”.

$$M = \{a : a \text{ hat die Eigenschaft } E\}$$

heißt: “ M ist die Menge aller Elementen a , die die Eigenschaft E haben, und nur diese Elemente liegen in M .”

Beispiel 0.1 *i) Für $a \neq b$ gilt*

$$\{a, b\} = \{b, a\} = \{a, b, a\}.$$

$$ii) \mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}.$$

$$iii) \emptyset = \{\}: \text{leere Menge.}$$

$$iv) \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ teilt } 15\} = \{1, 3, 5, 15\}.$$

Quantoren:

“ $\forall$ ”: “für alle” z.B. $\forall n \in \mathbb{N} : (n+1)^2 > n+1$.

“ $\exists$ ”: “es gibt” z.B. $\forall n \in \mathbb{N} \exists k \in \mathbb{N} : k > n$.

“ $:=$ ”: “gilt per Definition” z.B. $M := \{1, 2, 3\}$.

“ $(A) \Rightarrow (B)$ ”: “Aus der Aussage (A) folgt die Aussage (B)” z.B. $n > 5 \Rightarrow n^2 > 20$.

Sei M, N zwei Mengen. M heißt in N *enthalten*, in Zeichen:

$$M \subset N,$$

wenn gilt: ist $x \in M$, so auch $x \in N$. Man nennt M dann auch *Teilmenge* von N . Zwei Menge M, N sind genau dann *gleich*, wann

$$M \subset N \text{ und } N \subset M.$$

Dass heißt:

$$M = N \Leftrightarrow M \subset N \text{ und } N \subset M$$

Definition 0.1 (Verknüpfungen) Seien M, N beliebige Mengen:

- *Vereinigung:* $M \cup N := \{x \mid x \in M \text{ oder } x \in N\}$.
- *Durchschnitt:* $M \cap N := \{x \mid x \in M \text{ und } x \in N\}$.
- *Differenz:* $M \setminus N := \{x \mid x \in M, x \notin N\}$
- *Produktmenge:* $M \times N := \{(x, y) \mid x \in M \text{ und } y \in N\}$
- *Potenmenge:* $\mathcal{P}(M) := \text{Die Menge aller Teilmengen von } M$.

Sei $M \subset X$. Das *Komplement* von M in X ist $M^c := X \setminus M$.

Für diese Verknüpfungen gelten die folgenden Regeln:

$$\begin{aligned}(A \cup B) \cup C &= A \cup (B \cup C), \\ (A \cap B) \cap C &= A \cap (B \cap C), \\ A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap (A \cup C), \\ A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C), \\ A \cup \emptyset &= A, \\ A \cap \emptyset &= \emptyset.\end{aligned}$$

BEWEIS: Wir zeigen nur

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Es folgt aus

$$\begin{aligned}x \in A \cap (B \cup C) &\Leftrightarrow (x \in A) \text{ und } (x \in B \cup C) \\ &\Leftrightarrow (x \in A) \text{ und } (x \in B \text{ oder } x \in C) \\ &\Leftrightarrow (x \in A \text{ und } x \in B) \text{ oder } (x \in A \text{ und } x \in C) \\ &\Leftrightarrow (x \in A \cap B) \text{ oder } (x \in A \cap C) \\ &\Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C).\end{aligned}$$

□

Für das Komplement haben wir die folgenden Eigenschaften:

Seien $A, B \subset X$ mit Komplement $A^c = X \setminus A$ und $B^c = X \setminus B$. Dann gilt:

- i) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.
- ii) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.
- iii) ist $A \subset B$, so ist $B^c \subset A^c$.

BEWEIS: Wir zeigen nur i). Sei $x \in X$. i) folgt aus

$$\begin{aligned}
 x \in (A \cup B)^c &\Leftrightarrow x \notin (A \cup B) \\
 &\Leftrightarrow (x \notin A) \text{ und } (x \notin B) \\
 &\Leftrightarrow (x \in A^c) \text{ und } (x \in B^c) \\
 &\Leftrightarrow x \in A^c \cap B^c.
 \end{aligned}$$

□

0.2 Abbildungen

Definition 0.2 Seien M, N Mengen. Eine Abbildung f von M nach N

$$f : M \rightarrow N$$

ordnet jedem Element $x \in M$ ein Element $f(x) \in N$ zu.

Man bezeichnet die Abbildung $f : M \rightarrow N$ auch mit $x \mapsto f(x)$. Nämlich

$$f : N \rightarrow M, x \mapsto f(x).$$

Für $N = \mathbb{R}$ wird f auch *Funktion* genannt. Man nennt M den *Definitionsbereich* von f , N den *Zielraum* von f , und $f(M) := \{f(x) : x \in M\}$ heißt *Wertebereich* von f oder *Bild* von M unter f . Für $A \subset M$ nennt man die Menge $f(A) := \{f(x) : x \in A\}$ *Bild* von A und für $B \subset N$ die Menge

$$f^{-1}(B) := \{x \in M : f(x) \in B\} \quad \text{Urbild von } B.$$

Eine Abbildung (Funktion) wird erklärt durch die Angabe:

- des Definitionsbereiches (hier M)
- des Bild- oder Wertebereiches (hier N)
- der Abbildungsvorschrift (hier $x \mapsto f(x)$).

Definition 0.3 Die Abbildung $f : M \rightarrow N$ heißt

- *injektiv*, wenn aus $f(x) = f(x')$ folgt $x = x'$,
- *surjektiv*, wenn zu jedem $y \in N$ gibt es ein $x \in M$ mit $f(x) = y$,
- *bijektiv*, wenn f injektiv und surjektiv.

Definition 0.4 Seien M, N, L Mengen und $f : M \rightarrow N$ eine Abbildung. Sei $x \in M$

- i) Zu der Abbildung $g : N \rightarrow L$ ist die Komposition $g \circ f : M \rightarrow L$ die Abbildung definiert durch $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.
- ii) Die Abbildung $g : N \rightarrow M$ heißt *inverse Abbildung* zu f , in Zeichen $g = f^{-1}$, wenn gilt: $g \circ f = id_M$ und $f \circ g = id_N$. Hierbei bezeichnet $id_M : M \rightarrow M$ die *Identitätsabbildung*, $id_M(x) = x$ für alle $x \in M$.