D. Wolke

Kurzmanuskript zur Vorlesung Differentialgleichungen für Mikrosystemtechniker

WS 2006/07

Literatur
1. L. Collatz, Differentialgleichungen, Teubner–Verlag
2. H. Heuser, Gewöhnliche Differentialgleichungen, Teubner–Verlag

Außerdem die Kapitel über Differentialgleichungen in Büchern über Mathematik für Ingenieure, z.B. **Merziger–Wirth**, Repetitorium der höheren Mathematik. **Meyberg–Vachenauer**, Höhere Mathematik Bd. II.

1. Kapitel. Grundbegriffe

1.1. G Gebiet in $\mathbb{R}^2$ (i.a. wird ein Rechteck $R=(a,b)\times(c,d)=\big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2, a<x<b, c<y<d\big\}$ genommen). f stetig auf G. Die Gleichung

(Dgl) $$y'=f(x,y)$$

ist eine **Differentialgleichung** (Dgl) **erster Ordnung in expliziter Form** (d.h. die Gleichung ist nach y' aufgelöst. Implizit: $F(x,y,y')=0$).
Eine auf einem Intervall I stetig differenzierbare Funktion $y=y(x)$ mit $\big(x,y(x)\big)\in G$ für alle $x\in I$ heißt **Lösung der Dgl**, wenn für alle $x\in I$ $y'(x)=f\big(x,y(x)\big)$ gilt.

1.2. Durch (Dgl) wird in jedem Punkt $(x,y)\in G$ eine Richtung $f(x,y)$ gegeben, d.h. f induziert auf G ein **Richtungsfeld**. Für eine Lösung $y=y(x)$ gilt: Die Funktion y hat an der Stelle x die Ableitung $f\big(x,y(x)\big)$, bzw. die Tangente an den Graphen im Punkt $\big(x,y(x)\big)$ hat die Richtung oder Steigung $f\big(x,y(x)\big)$.

1.3. Für $n\in\mathbb{N}$, ein Gebiet G in $\mathbb{R}^{n+1}$ und auf G stetigen Funktionen $f_1,\dots,f_n$ ist

($*$) $$y_1'=f_1(x,y_1,\dots,y_n),\dots,y_n'=f_n(x,y_1,\dots,y_n)$$

ein **System von Dgln erster Ordnung**. Eine Lösung ist ein n–Tupel $\vec{y}=\begin{pmatrix} y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$ stetig differenzierbarer Funktionen, die ($*$) genügen.

Für ein auf G stetiges f ist

$$y^{(n)}=f\big(x,y,y',\dots,y^{(n-1)}\big)$$

eine Dgl n–ter Ordnung. Diese kann durch die Festlegung $y_1 = y,\ y_2 = y', \dots, y_n = y^{(n-1)}$ in das System

$$y_1' = y_2, \dots,\ y_{n-1}' = y_n,\ y_n' = f(x, y_1, \dots, y_n)$$

überführt werden.

1.4. Ein Punkt $(x_0, y_0) \in G$ (s. 1.1) ist ein **Anfangswert** (AW) zur Dgl (d.h. zur Lösungsfunktion $y(x)$ wird an der Stelle x_0 der Wert y_0 vorgeschrieben). Ein **Anfangswertproblem** (AWP) ist eine Dgl zusammen mit einem (AW) (x_0, y_0).

Für ein System $(*)$ ist $(x_0, y_{10}, \dots, y_{n0}) \in G$ ein Anfangswert (d.h. es werden die Werte von $y_1, \dots, y_n$ bei x_0 vorgegeben).

Bei einer Dgl n–ter Ordnung wird durch den AW $(x_0, y_{0\,0}, \dots, y_{n-1\,0})$ für die Lösungsfunktion

$$y(x_0) = y_{0\,0}, \quad y'(x_0) = y_{1\,0},\ \dots\ , y^{(n-1)} = y_{n-1\,0}$$

vorgeschrieben.

2. Kapitel.
Elementar lösbare Differentialgleichungen erster Ordnung
2.1. Trennung der Variablen

Sei f stetig auf dem Intervall I, g stetig und $\neq 0$ auf dem Intervall J. Die Dgl

$$(*) \qquad y' = f(x)\, g(y)$$

heißt **Dgl mit getrennten Variablen**.

Sei G Stammfunktion zu $1/g$, d.h. $G(y) = \int \big(g(y)\big)^{-1} dy$, F Stammfunktion zu f. Man erhält die Lösungen von $(*)$ indem man die Gleichung $G(y) = F(x)$ nach y auflöst.

Ist $x_0 \in I,\ y_0 \in J,$ dann erhält man eine Lösung zum AWP

$$y' = f(x)\, g(y), \quad y(x_0) = y_0,$$

indem man die Gleichung

$$\int_{y_0}^{y} dt/g(t) = \int_{x_0}^{x} f(u)du$$

nach y auflöst.

Hinweis: Das Verfahren ist nur praktikabel, wenn

a) beide Integrationen ausführbar sind und
b) die Auflösung nach y gelingt.

Die **Ähnlichkeitsdifferentialgleichung** $y' = h(y/x)$ kann durch die Substitution $z(x) = y(x)/x$ in die Dgl $z' = x^{-1}\big(h(z) - z\big)$ überführt werden.

2.2. Die lineare Dgl erster Ordnung
2.2.1. Die Dgl

$$(L_1) \qquad y' = f(x)\, y + g(x) \quad \big(f, g \in C(I)\big)$$

heißt **lineare Dgl erster Ordnung**. Sie heißt **homogen**, wenn g identisch verschwindet, sonst **inhomogen**. g wird auch **Störfunktion** genannt.

2.2.2. Alle Lösungen der homogenen Gleichung

$$(H_1) \qquad y' = f(x)\, y$$

haben die Gestalt

$$y(x) = \exp F(x), \quad F \text{ Stammfunktion zu } f.$$

Das AWP $(H_1) + (x_0, y_0)$ hat die auf I eindeutig bestimmte Lösung

$$y(x) = y_0 \exp\Big(\int_{x_0}^{x} f(t)\, dt\Big).$$

2.2.3. Sei F Stammfunktion zu f. Dann haben die Lösungen der inhomogenen Gleichung

$$(Ih_1) \qquad y' = f(x)y + g(x)$$

die Gestalt

$$y(x) = \exp\big(F(x)\big) \cdot \int g(x) \exp\big(-F(x)\big)\, dx.$$

Das AWP $(Ih_1) + (x_0, y_0)$ hat die eindeutig bestimmte Lösung

$$y(x) = \exp\Big(\int_{x_0}^{x} f(t)\, dt\Big)\Big(y_0 + \int_{x_0}^{x} g(t) \exp\Big(-\int_{x_0}^{t} f(u)\, du\Big) dt\Big)$$

3. Kapitel.
Existenz– und Eindeutigkeitsaussagen für Differentialgleichungen 1. Ordnung
3.1. f sei stetig auf dem abgeschlossenen Rechteck

$$R = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad |x - x_0| \le a, \quad |y - y_0| \le b\big\}.$$
$$A = \max_{(x,y)\in R} \big|f(x,y)\big|, \quad \text{OBdA} \quad A > 0.$$

Falls $a \le bA^{-1}$ (andernfalls wird x auf $|x - x_0| \le bA^{-1}$ eingeschränkt), erwartet man Lösungen $y = y(x)$ des

$$(\text{AWP}) \qquad y' = f(x,y), \quad y(x_0) = y_0$$

mit $y \in C^1(I)$, $I = [x_0 - a, x_0 + a]$.

3.2. Existenzsatz von Peano (Guiseppe P., 1858–1932)
Unter den Bedingungen 3.1. hat (AWP) mindestens eine Lösung. Diese muß nicht

eindeutig bestimmt sein. Beispiel $y' = |y|^{1/2}, \quad (x_0, y_0) = (0, 0)$.

3.3. Existenz– und Eindeutigkeitssatz von Picard–Lindelöf (Emile P., 1856–1941; Ernst L., 1870–1946)
Falls f zusätzlich die **Lipschitz–Bedingung**

$$\exists\, L > 0\ \forall\, (x, y), (x, \tilde{y}) \in R: \ \big|f(x, y) - f(x, \tilde{y})\big| \le L|y - \tilde{y}|$$

(Rudolf L., 1832–1903) erfüllt, besitzt (AWP) genau eine Lösung.

Hinweis. Die Lipschitz–Bedingung ist erfüllt, wenn auf R $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ existiert und beschränkt ist.

Beweisschritte
1) (AWP) ist äquivalent zur **Integralgleichung**

$$\text{(IGL)} \qquad y(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f\big(t, y(t)\big)\, dt.$$

2) Sei D die Menge der auf $I = [x_0 - a, x_0 + a]$ stetig differenzierbaren Funktionen

$$\varphi : I \to J = [y_0 - b, y_0 + b] \quad \text{mit} \quad \varphi(x_0) = y_0.$$

Der **Operator** $T : D \to D$ wird definiert durch

$$(T\varphi)(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f\big(t, \varphi(t)\big)\, dt.$$

$y \in D$ ist Lösung zu (AWP) bzw. (IGL) genau dann, wenn y **Fixpunkt** von T ist. (d.h. $Ty = y$).

3) T besitzt genau einen Fixpunkt (d.h. (AWP) besitzt genau eine Lösung) $y \in D$. Man erhält diesen durch **Iteration:**

$$y_1 \text{ konstant } = y_0,\ y_2 = Ty_1,\ y_3 = Ty_2, \ldots .$$

y ist Grenzwert der Folge (y_n).

4. Kapitel. Numerische Verfahren

4.1. Eulersches oder Cauchysches Polygonzugverfahren (Leonhard E., 1707–1783; Augustin Louis C., 1789–1857)
Das Intervall $[x_0, x_0 + a]$ werde in n Teile der Länge $h = a/n$ eingeteilt. In $I_1 = [x_0, x_0 + h]$ werde die Lösung $y = y(x)$ des AWP $y' = f(x, y),\ y(x_0) = y_0$ durch die Gerade durch (x_0, y_0) mit der Steigung $s_0 = f(x_0, y_0)$ approximiert, $y_1 = y_o + hs_0$. In $I_2 = [x_0 + h,\ x_0 + 2h]$ analog mit der Geraden durch $(x_0 + h, y_1)$ mit der Steigung $s_1 = f(x_0 + h, y_1)$, usw. Man erhält so einen aus n Geradenstücken bestehenden Polygonzug

$\tilde{y}_h(x)$. Im Fall $f \in C^1(R)$ besteht für die eindeutig bestimmte Lösungsfunktion y die Fehlerabschätzung

$$\left|y(x) - \tilde{y}_h(x)\right| \le C\,h$$

(mit einer Konstanten $C = C(f,a)$).

4.2. Runge–Kutta–Verfahren (Carl R., 1856–1927; Martin Wilhelm K., 1867–1944)

$$\begin{aligned}
k_1 =& f(x_0, y_0), \quad k_2 = f\Big(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{1}{2} h\, k_1\Big),\\
k_3 =& f\Big(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{1}{2} h\, k_2\Big), \quad k_4 = f(x_0 + h, y_0 + h\, k_3)\\
y_1 =& \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) + y_0.
\end{aligned}$$

Man fahre fort mit $f(x_0 + h, y_1)$ usw. und erhält nach n Schritten $y_n = \tilde{y}(x_0 + a)$. Im Fall $f \in C^5(R)$ gilt die Fehlerabschätzung

$$\left|y(x_0 + a) - \tilde{y}(x_0 + a)\right| \le C\,h^4.$$

5. Kapitel. Systeme linearer Differentialgleichungen
5.1.1. Ein System

$$(L_n) \qquad \begin{cases} y_1' = a_{11} y_1 + & \dots & + a_{1n} y_n + b_1 \\ & \vdots & \\ y_n' = a_{n1} y_1 + & \dots & + a_{nn} y_n + b_n \end{cases}$$

Kurz: $\vec{y}\,' = A\vec{y} + \vec{b}$ heißt **System linearer Dgln erster Ordnung**. Dabei sind die Funktionen a_{jk} $(1 \le j, k \le n)$ und b_j $(1 \le j \le n)$ stetig auf einem Intervall I. Falls alle b_j identisch verschwinden, heißt das System **homogen ($\boldsymbol{H_n}$)**, andernfalls **inhomogen ($\boldsymbol{Ih_n}$)**. Falls alle a_{jk} konstant sind (System mit konstanten Koeffizienten, s. Kap. 6), kann bei (H_n) als I ganz $\mathbb{R}$ genommen werden. Für $x_0 \in I$ und $\vec{\eta} \in \mathbb{R}^n$ ist $(L_n) + (x_0, \vec{\eta})$ ein zugehöriges AWP.

5.1.2. Die Differentialgleichung

$$y^{(n)} = a_0\, y + \dots + a_{n-1} y^{(n-1)} + b \quad (a_0, \dots, a_{n-1}, b \quad \text{stetig auf } I)$$

heißt **lineare Dgl $\boldsymbol{n}$-ter Ordnung, homogen** im Fall $b \equiv 0$, ansonsten **inhomogen**.

Die Dgl kann durch $y_1 = y$, $y_2 = y', \dots, y_n = y^{(n-1)}$ umgewandelt werden in das System

$$\begin{cases} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= \quad y_3 \\ & \vdots \\ y_{n-1}' &= \qquad\quad y_n \\ y_n' &= a_0 y_1 + a_1 y_2 + \dots + a_{n-1} y_n + b \end{cases}$$

5.2. Existenz– und Eindeutigkeitsaussagen

5.2.1. Für jede AB $x_0 \in I,\ \vec{\eta} \in \mathbb{R}^n$ hat das AWP

$$\vec{y}\,' = A\vec{y} + \vec{b},\ \vec{y}(x_0) = \vec{\eta}$$

eine auf ganz I eindeutig bestimmte Lösung.
Dementsprechend ist die lineare Dgl n–ter Ordnung mit der AB $(x_0, \vec{\eta})$ auf I eindeutig lösbar (d.h. $y(x_0) = \eta_1, \quad y'(x_0) = \eta_2,\ \ldots\ , y^{(n-1)}(x_0) = \eta_n$).

5.2.2. Die Menge der Lösungen zu $(H_n)\ \vec{y}\,' = A\vec{y}$ bildet einen n–dimensionalen linearen Raum (einen linearen Unterraum des Vektorraumes der n–Tupel auf I stetig differenzierbarer Funktionen). Je n linear unabhängige Lösungen heißen **Basis** oder **Fundamentalsystem (FS)** zu (H_n).

5.2.3. Die Menge der Lösungen von $(Ih_n)\ \vec{y}\,' = A\vec{y} + \vec{b}$ bildet einen n–dimensionalen affinen Raum. Jede Lösung $\vec{y}$ zu (Ih_n) läßt sich schreiben als $\vec{y} = \vec{y}_s + \vec{y}_h$. Dabei ist $\vec{y}_s$ eine spezielle **(partikuläre) Lösung** zu (Ih_N), $\vec{y}_h$ eine geeignete Lösung zu (H_n).
Oder: Durchläuft $\vec{y}_h$ alle Lösungen zu (H_n) und ist $\vec{y}_s$ eine feste Lösung zu (Ih_n), so durchläuft $\vec{y}_s + \vec{y}_h$ alle Lösungen zu (Ih_n).

5.2.4. Hauptprobleme bei linearen Systemen

- **a)** Bestimmung eines Fundamentalsystems zu (H_n) (i.a. schwierig!)
- **b)** Bei Kenntnis eines FS zu (H_n) Bestimmung einer speziellen Lösung zu (Ih_n) (machbar!)

5.3. Homogene Systeme

5.3.1. Seien $\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_n$ n Lösungen zu (H_n). Die Determinante

$$W(\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_n, x) = \mathrm{Det}\big(\vec{y}_1(x) \ldots \vec{y}_n(x)\big) = \mathrm{Det}\begin{pmatrix} y_{11} \cdots y_{n1} \\ y_{1n} \cdots y_{nn} \end{pmatrix}(x)$$

wird als **Wronski–Determinante** der n Lösungen bezeichnet (Josef Maria W., 1778–1853).
Wichtige Eigenschaft: $W(\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_n, x)$ ist entweder identisch $= 0$ (dann bilden $\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_n$ kein FS) oder $W(\ )$ ist stets $\neq 0$ (dann liegt ein FS vor). Man braucht $W(\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_n, x)$ daher nur für ein x auszurechnen.

$W(\ )$ besitzt die Darstellung

$$W(\ , x) = W(\ , x_0) \cdot \exp\Big(\int_{x_0}^{x} S_p(A)(t)\, dt\Big)$$

$$\big(Sp(A) = \text{Spur } (A) = a_{11} + \cdots + a_{nn}\big).$$

5.3.2. d'Alembertsches Reduktionsverfahren für $\boldsymbol{n = 2}$ (Jean Baptiste d'A., 1717–1783)
Es sei (y_1, z_1) mit $y \neq 0$ auf I eine Lösung zu

$$(H_2) \qquad \begin{aligned} y' &= a\,y + b\,z \\ z' &= c\,y + d\,z \end{aligned} \qquad \big(a, \ldots, d \in C(I)\big)$$

Man gewinnt eine von $\begin{pmatrix} y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ linear unabhängige Lösung $\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}$ aus dem Ansatz

$$y = uy_1, \quad z = uz_1 + v.$$

u und v ergeben sich aus

$$v' = v\Big(d - \frac{bz_1}{y_1}\Big), \quad u' = \frac{bv}{y_1}$$

5.3.3. Sei $\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_n$ ein FS zu (H_n). Man erhält die Lösung $\vec{y}$ des (AWP) (H_n)+$(x_0, \vec{\eta})$ als $\vec{y} = c_1 \vec{y}_1 + \cdots + c_n \vec{y}_n$, wobei $(c_1, \ldots, c_n)$ die eindeutige Lösung des linearen Gleichungssystems

$$c_1 \vec{y}_1(x_0) + \cdots + c_n \vec{y}_n(x_0) = \vec{\eta}$$

ist.

5.4. Inhomogene Systeme

5.4.1. Sei $\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_n$ ein FS zu (H_n). Man erhält eine Lösung zu (Ih_n) $\vec{y}\,' = A\vec{y} + \vec{b}$ durch den Ansatz

$$\vec{y}(x) = c_1(x)\vec{y}_1(x) + \cdots + c_n(x)\vec{y}_n(x)$$

(**Variation der Konstanten**).
Sei Y^{-1} die Umkehrmatrix der für jedes $x \in I$ regulären Matrix $(\vec{y}_1 \cdots \vec{y}_n)$. Dann erhält man $c_1, \ldots, c_n$ aus

$$\begin{pmatrix} c_1' \\ \vdots \\ c_n' \end{pmatrix} = Y^{-1}\,\vec{b}.$$

5.4.2. Sei $y_1, \ldots, y_n$ ein FS zur Dgl

$$y^{(n)} = a_0\,y + \cdots + a_{n-1}\,y^{(n-1)}$$

Sei

$$Y^{-1} = \begin{pmatrix} w_{11} & \cdots & w_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ w_{n1} & \cdots & w_{nn} \end{pmatrix} \text{ die Umkehrmatrix zu } Y = \begin{pmatrix} y_1 & \cdots & y_n \\ y_1' & \cdots & y_n' \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix}.$$

Man berechne $c_1, \dots, c_n$ aus $c_1' = w_{1n}b, \dots, c_n' = w_{nn}b$.
Dann ist $y = c_1y_1 + \cdots + c_ny_n$ eine Lösung der inhomogenen Gleichung

$$y^{(n)} = a_0y + \cdots + a_{n-1}\,y^{(n-1)} + b.$$

5.4.3. $n = 2$. Sei $\begin{pmatrix} y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$ ein FS zum System

(H_2) $$y' = ay + bz, \quad z' = cy + dz,$$

$$W(x) = \mathrm{Det}\begin{pmatrix} y_1\, y_2 \\ z_1\, z_2 \end{pmatrix}(x) = (y_1z_2 - y_2z_1)(x) \neq 0.$$

Man bestimme e_1 und e_2 aus

$$e_1' = \frac{1}{W}\big(z_2g - y_2h\big), \quad e_2' = \frac{1}{W}\big(- z_1g + y_1h\big).$$

Dann ist $e_1\begin{pmatrix} y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + e_2\begin{pmatrix} y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$ eine Lösung zu

(Ih_2) $$y' = ay + bz + g, \quad z' = cy + dz + h.$$

Bei der linearen Dgl $y'' = fy + gy' + h$ mit dem FS y_1, y_2 erhält man eine Lösung $y = e_1y_1 + e_2y_2$ aus

$$e_1' = \frac{1}{W}\big(- y_2\,h\big), \quad e_2' = \frac{1}{W}\,y_1\,h, \quad W = y_1y_2' - y_2y_1'.$$

5.4.4. Sei $\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n$ ein FS zu (H_n) und $\vec{z}$ eine Lösung zu (Ih_n) $\vec{y}\,' = A\vec{y} + \vec{b}$. $x_0 \in I$, $\vec{\eta} \in \mathbb{R}^n$. Die Lösung $\vec{y}$ zum AWP $(Ih_n) + (x_0, \vec{\eta})$ hat die Gestalt

$$\vec{y} = c_1\vec{y}_1 + \cdots + c_n\vec{y}_n + \vec{z},$$

wobei $(c_1, \dots, c_n)$ die eindeutige Lösung des linearen Gleichungssystems

$$c_1\vec{y}_1(x_0) + \cdots + c_n\vec{y}_n(x) = \vec{\eta} - \vec{z}(x_0)$$

ist.

6. Kapitel.
Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

6.1. A reelle $n \times n$–Matrix

(H_n) $$\vec{y}\,' = A\vec{y}, \quad I = \mathbb{R}$$

(Ih_n) $$\vec{y}\,' = A\vec{y} + \vec{b}, \quad \vec{b} \text{ stetig auf } I \subseteq \mathbb{R}.$$

6.2. Exponentialansatz, reeller Fall

Ist $\lambda \in \mathbb{R}$ Eigenwert von A und $\vec{c} \neq \vec{0}$ Eigenvektor zu λ (d.h. $A\vec{c} = \lambda\vec{c}$), dann ist $\vec{y}(x) = \vec{c}\,e^{\lambda x}$ Lösung zu (H_n).

Hat insbesondere A n verschiedene reelle Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ mit Eigenvektoren $\vec{c}_1, \ldots, \vec{c}_n$, dann bildet $\vec{c}_1\, e^{\lambda_1 x}, \ldots, \vec{c}_n\, e^{\lambda_n x}$ ein FS zu (H_n).

Zur Dgl n–ter Ordnung $y^{(n)} = a_0\, y + \cdots + a_{n-1}\, y^{n-1}$. Ist $\lambda \in \mathbb{R}$ Nullstelle des Polynoms

$$p(x) = x^n - a_{n-1}\, x^{n-1} - \cdots - a_0,$$

dann ist $y(x) = e^{\lambda x}$ Lösung. Zu verschiedenen λ gehören linear unabhängige Lösungen.

6.3. Exponentialansatz, komplexer Fall

1) Sei $\lambda = \alpha + i\beta$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \beta \neq 0)$ komplexer Eigenwert zu A (d.h. komplexe Nullstelle des **charakteristischen Polynoms** $p(x) = \text{Det}\ (A - x\, E_n)$). Sei $\vec{c} = \vec{c}_1 + i\,\vec{c}_2$ $(\vec{c}_1, \vec{c}_2 \in \mathbb{R}^n)$ komplexer Eigenvektor zu λ. Dann ist $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$ ebenfalls Eigenwert
zu A und $\bar{\vec{c}} = \vec{c}_1 - i\,\vec{c}_2$ Eigenvektor zu $\bar{\lambda}$.

2) Zu dem Eigenwert–Paar $\lambda, \bar{\lambda}$ gehören die zwei reellen Lösungen

$$\begin{aligned}\vec{y}(x) &= e^{\alpha x}\big(\vec{c}_1 \cos\beta x - \vec{c}_2 \sin\beta x\big)\\ \vec{z}(x) &= e^{\alpha x}\big(\vec{c}_2 \cos\beta x + \vec{c}_1 \sin\beta x\big)\end{aligned}$$

3) Falls A k verschiedene reelle Eigenwerte $\mu_1, \ldots, \mu_k$ und $2r$ verschiedene komplexe Eigenwerte $\lambda_1, \bar{\lambda}_1, \ldots, \lambda_r, \bar{\lambda}_r$ mit $k + 2r = n$ besitzt, bilden die in 6.2. und 6.3. 2) angegebenen Lösungen ein FS zu (H_n).

6.4. Allgemeiner Fall

1) Sei $\lambda \in \mathbb{R}$ m–fache Nullstelle des charakteristischen Polynoms $p(x)$. Dann gibt es m linear unabhängige Lösungen $\vec{y}(x) = \vec{c}(x)\, e^{\lambda x}$. Dabei sind die Komponenten der $\vec{c}(x)$ Polynome vom Grad $\leq m - 1$.

2) Sei $\lambda = \alpha + i\beta$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \beta \neq 0)$ m- -fache komplexe Nullstelle von $p(x)$. Dann gibt es $2m$ linear unabhängige Lösungen

$$\vec{y}(x) = e^{\alpha x}\big(\vec{c}_1(x) \cos\beta x + \vec{c}_2(x) \sin\beta x\big).$$

$\vec{c}_1$ und $\vec{c}_2$ wie in 1). Aus den Lösungen 1) und 2) entsteht ein FS zu (H_n).

6.5. Lineare Differentialgleichungen n–ter Ordnung, allgemeiner Fall

1) Sei $\lambda \in \mathbb{R}$ m–fache Nullstelle zu $p(x) = x^n - a_{n-1}\, x^{n-1} - \cdots - a_0$. Dann sind die Funktionen

$$e^{\lambda x}, \quad x\, e^{\lambda x}, \ldots, x^{m-1}\, e^{\lambda x}$$

m linear unabhängige Lösungen zu (H_n) $y^{(n)} = a_0\, y + \cdots + a_{n-1}\, y^{(n-1)}$.

2) Sei $\lambda = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \beta \neq 0)$ m–fache Nullstelle von $p(x)$. Dann sind

$$e^{\alpha x}\cos\beta x, \quad x\,e^{\alpha x}\cos\beta x, \ldots, x^{m-1}\,e^{\alpha x}\cos\beta x,$$
$$e^{\alpha x}\sin\beta x, \quad x\,e^{\alpha x}\sin\beta x, \ldots, x^{m-1}\,e^{\alpha x}\sin\beta x,$$

$2m$ linear unabhängige Lösungen zu (H_n).

6.6. Inhomogene Differentialgleichung n–ter Ordnung
Die „Störfunktion" $b(x)$ in der Gleichung

$$(Ih_n) \qquad y^{(n)} = a_0\,y + \cdots + a_{n-1}\,y^{(n-1)} + b$$

habe die Gestalt

$$b(x) = (c_0 + c_1\,x + \cdots + c_m\,x^m)\,e^{\alpha x}\begin{cases}\cos\beta x\\ \sin\beta x.\end{cases}$$

Sei $\lambda = \alpha + i\beta$ k–fache Nullstelle von $p(x) = x^n - a_{n-1}\,x^{n-1} - \cdots - a_0$ $(k = 0:\ p(\lambda) \neq 0)$. Dann hat (Ih_n) eine Lösung

$$x^k\big((A_0 + A_1x + \cdots + A_m\,x^m)\cos\beta x + (B_0 + B_1x + \cdots + B_mx^m)\sin\beta x\big)e^{\alpha x} \ (A_j, B_j \in \mathbb{R}).$$

7. Kapitel. Potenzreihen–Entwicklung
7.1. Die Funktionen $a_0(x), \ldots, a_{n-1}(x), b(x)$ seien im Intervall $I = (x_0 - r, x_0 + r)$ als Potenzreihen darstellbar. $\eta_0, \ldots, \eta_{n-1} \in \mathbb{R}$. Dann kann die Lösung des AWP

$$(H_n) \qquad y^{(n)} = a_0\,y + \cdots + a_{n-1}\,y^{(n-1)} + b,\ y(x_0) = \eta_0, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = \eta_{n-1}$$

als Potenzreihe

$$y(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu (x - x_0)^\nu \quad \big(|x - x_0| < r\big)$$

geschrieben werden.

7.2. Beispiel $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$

$$(\text{AWP}) \qquad y'' + a_1y' + a_0y = b(x), \quad y(x_0) = \eta_0, \quad y'(x_0) = \eta_1$$

$$b(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu (x - x_0)^\nu \quad \big(|x - x_0| < r\big).$$

$$y(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu (x - x_0)^\nu, \quad c_0 = y(x_0) = \eta_0$$
$$y'(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (\nu + 1)c_{\nu+1}(x - x_0)^\nu, \quad c_1 = y'(x_0) = \eta_1$$
$$y''(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (\nu + 1)(\nu + 2)c_{\nu+2}(x - x_0)^\nu.$$

Einsetzen in die Dgl und Koeffizientenvergleich ergibt für $\nu \geq 0$

$$a_0 c_\nu + a_1(\nu+1)\, c_{\nu+1} + (\nu+1)(\nu+2) c_{\nu+2} = b_\nu .$$

Hieraus können $c_2, c_3, \ldots$ rekursiv berechnet werden.

8. Kapitel. Laplace–Transformation (Pierre Simon L., 1749–1827)
8.1. $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ (oder $\to \mathbb{C}$). Es existieren c und $\alpha \geq 0$ mit $\forall\, t \geq 0 :$ $\left|f(t)\right| \leq c\exp(\alpha t)$, f sei stückweise stetig differenzierbar.
Dann existiert für $z \in \mathbb{C}$ mit Re z (= Realteil von z) $> \alpha$

$$F(z) \underset{\text{Df}}{=} \int_0^\infty f(t)\exp(-zt)\, dt.$$

F heißt die **Laplace–Transformierte** von f. Kurz: $F = \mathfrak{L}(f)$. Die Operation $\mathfrak{L}$ ist im wesentlichen umkehrbar, d.h. f ist durch F – mit gewissen Einschränkungen – eindeutig bestimmt. f heißt auch die **Originalfunktion**, F die **Bildfunktion**.

8.2. Beispiele

1) $\mathfrak{L}(1) = z^{-1}$,

2) $\mathfrak{L}(t^n) = n!\, z^{-n-1}$,

3) $\mathfrak{L}\big(\exp(\alpha t)\big) = (z-\alpha)^{-1}$ ($\alpha \in \mathbb{R}$, Re $z > \alpha$)

4) $\mathfrak{L}(\sin \omega t) = \dfrac{\omega}{z^2+\omega^2}$, $\mathfrak{L}(\cos \omega t) = \dfrac{z}{z^2+\omega^2}$.

8.3. Rechenregeln

1) $\mathfrak{L}(af + bg) = a\mathfrak{L}(f) + b\mathfrak{L}(g)$,

2) $\mathfrak{L}\big(f(at)\big) = \dfrac{1}{a} F\Big(\dfrac{z}{a}\Big)$, falls $F = \mathfrak{L}(f)$,

3) $\mathfrak{L}\big(f'(t)\big) = z\mathfrak{L}(f) - f(0)$,

$$\mathfrak{L}\big(f^{(n)}(t)\big) = z^n \mathfrak{L}\big(f(t)\big) - z^{n-1} f(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)$$

(falls f n mal stetig differenzierbar ist)

4) $\mathfrak{L}\big(e^{at} f(t)\big) = F(z-a)$,

5) Sei $F = \mathfrak{L}(f)$, $G = \mathfrak{L}(g)$, dann ist

$$\mathfrak{L}\Big(\int_0^t f(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau\Big) = F(z)\, G(z) \quad \text{(Faltungssatz)}$$

8.4. Anwendung auf lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten.
Man wendet auf die Dgl $y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_0 y = h$ die $\mathfrak{L}$– Operation an und erhält nach 8.3. 3)

$$p_n(z)\big(\mathfrak{L}(y)\big)(z) + q_{n-1}(z) = \big(\mathfrak{L}(h)\big)(z)$$

(p_n ist ein Polynom vom Grad n, q_{n-1} ein Polynom vom Grad $n-1$). $y = y(t)$ ergibt sich durch Rücktransformation von $\big(\mathfrak{L}(h) - q_{n-1}\big)/p_n$.

9. Kapitel.
Rand– und Eigenwertangaben bei linearen Differentialgleichungen 2. Ordnung
9.1. Randwertaufgaben

9.1.1. $a < b$, $I = [a,b]$ $a_1, a_2, f \in C(I)$. Δy bezeichne den **Differentialoperator** $y'' + a_1 y' + a_0 y$.

$$(H) \qquad \Delta y = 0, \qquad (Ih) \quad \Delta y = f.$$

Mit $(\alpha_1, \alpha_2) \neq (0,0)$, $(\beta_1, \beta_2) \neq (0,0)$, $\rho_1, \rho_2 \in \mathbb{R}$ bildet man die **Randbedingungen**

$$R_1 y = \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a), \quad R_2 y = \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b)$$

Als **Randwertaufgabe** wird das Problem (Existenz, Eindeutigkeit)

$$(\text{RWA}) \qquad \Delta y = f, \quad R_1 y = \rho_1, \quad R_2 y = \rho_2$$

bezeichnet. **Halb–Homogen**, falls $\rho_1 = \rho_2 = 0$, **voll–homogen**, falls $f = 0$, $\rho_1 = \rho_2 = 0$, ansonsten **inhomogen**.

9.1.2. Sei y_1, y_2 ein Fundamentalsystem zur homogenen Dgl $\Delta y = y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$. Die RWA

$$\Delta y = f, \quad R_1 y = \rho_1, \quad R_2 y = \rho_2$$

ist genau dann eindeutig lösbar, wenn

$$\operatorname{Det}\begin{pmatrix} R_1 y_1 & R_1 y_2 \\ R_2 y_1 & R_2 y_2 \end{pmatrix} \neq 0 \quad \text{ist.}$$

Das RWA ist genau dann eindeutig lösbar, wenn das zugehörige voll–homogene Problem

$$\Delta y = 0, \quad R_1 y = R_2 y = 0$$

nur die triviale Lösung $y = 0$ besitzt.

9.2. Sturm–Liouvillesches Rand– und Eigenwertproblem (Charles S., 1803–1855; Josef L., 1809–1882)

9.2.1. Die Dgl $\Delta y = f$ kann auf die Gestalt $Ly = g$ gebracht werden mit

$$Ly = (py')' + qy \qquad (p \in C^1(I),\ p > 0).$$

Als **Sturm–Liouvillesche** (homogene) **Eigenwertaufgabe** wird

$$(\text{SL}) \qquad Ly + \lambda r y = 0, \quad R_1 y = R_2 y = 0 \quad (r \in C(I), \quad r > 0)$$

bezeichnet. Gesucht sind die $\lambda \in \mathbb{R}$ (**Eigenwerte**), für die (SL) eine nichttriviale Lösung (**Eigenfunktion**) besitzt.

9.2.2.

a) Die Eigenwerte zu (SL) bilden eine streng wachsende Folge (λ_n) mit $\lambda_n \to \infty$. Jedes λ_n ist einfach (d.h. die Lösungen zu (SL) mit $\lambda = \lambda_n$ bilden einen eindimensionalen linearen Raum).

b) Sei v_n eine Eigenfunktion zu λ_n. Man normiert v_n zu

$$u_n = v_n \Big(\int_a^b r(x)\, v_n^2(x)\, dx \Big)^{-1/2}.$$

Dann bilden die u_n ein **Orthonormalsystem**, d.h.

$$\int_a^b r u_n^2 dx = 1, \qquad \int_a^b r u_n u_m \, dx = 0 \quad \text{für} \quad m \neq n.$$

c) Sei u auf I stetig differenzierbar. Dann ist u auf I als absolut und gleichmäßig konvergente **Fourier–Reihe** bezüglich der u_n darstellbar

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \, u_n(x) \quad \text{mit} \quad c_n = \int_a^b r(t)\, u(t)\, u_n(t)\, dt$$

(**Fourier–Koeffizienten**, Jean–Baptiste F., 1768–1830).