Mathematisches Institut
Abt. für Reine Mathematik
Prof. Dr. D. Wolke
Dr. K. Halupczok

01.07.2004

Übungen zur Vorlesung

Funktionentheorie – SS 2004
Blatt 10

Abgabe: Donnerstag, 08.07.2004, vor der Vorlesung

Aufgabe 1.
Welche Typen von isolierten Singularitäten in $z = 0$ liegen vor bei

a) $f(z) = \dfrac{1}{e^{z^2} - 1}$, b) $f(z) = \dfrac{\sin^3 z}{z^5}$

c) $f(z) = z^3\, e^{-\frac{1}{z}}$, d) $\dfrac{\log(z+1) - z}{z^2}$?

Aufgabe 2.
Die Funktionen f und g haben bei z_0 beide eine Nullstelle der Ordnung k (bzw. einen Pol k–ter Ordnung). Dann hat $\frac{f}{g}$ bei z_0 eine hebbare Singularität und es gilt

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \to z_0} \frac{f^{(k)}(z)}{g^{(k)}(z)}.$$

Aufgabe 3.
Sei f ganz, nicht konstant. Zeigen Sie:

a) $f(\mathbb{C})$ liegt dicht in $\mathbb{C}$,

b) in $f(\mathbb{C})$ liegt mindestens eine reelle Zahl.

Aufgabe 4*.
Beweisen Sie die folgende Verallgemeinerung des Maximum–Prinzips:
Sei G ein beschränktes Gebiet, $f_1, \ldots, f_n \in H(G)$, $f_1, \ldots, f_n$ stetig auf den Rand ∂G von G fortsetzbar. Dann nimmt

$$\varphi(z) := \big|f_1(z)\big| + \cdots + \big|f_n(z)\big|$$

sein Maximum auf ∂G an.