Mathematisches Institut
Abt. für Reine Mathematik
Prof. Dr. D. Wolke
Dr. K. Halupczok

08.07.2004

Übungen zur Vorlesung

Funktionentheorie – SS 2004
Blatt 11

Abgabe: Donnerstag, 15.07.2004, vor der Vorlesung

Aufgabe 1.

a) Zeigen Sie:

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}.$$

Hinweis: Integrieren Sie $f(z) = \frac{e^{iz}}{z}$ entlang dem Weg $W = W_1 + W_2 + W_3 + W_4$; dabei bezeichnet W_1 die Strecke von $-R$ bis $-r, W_2$ den Kreisbogen um 0 vom Radius r von $-r$ bis r in der oberen Halbebene, W_3 die Strecke von r nach R und W_4 den Halbkreis um 0 vom Radius R von R nach $-R$ in der oberen Halbebene. Betrachten Sie die Grenzwerte für $r \to 0$ und $R \to \infty$.

b) Zeigen Sie für $n = 2, 3, \dots$:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^n} = \frac{\pi}{n} \left(\sin\frac{\pi}{n}\right)^{-1}.$$

Hinweis: Integrieren Sie entlang dem Weg $W = W_1 + W_2 + W_3$; dabei bezeichnet W_1 die Strecke von 0 bis R, W_2 den Kreisbogen um 0 vom Radius R von R bis $z_n := R\exp\left(\frac{2\pi i}{n}\right)$, W_3 die Strecke von z_n bis 0.

Aufgabe 2.

Berechnen Sie mit Hilfe des Residuensatzes:

a) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dt}{5+4\cos t}\,,$ b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2dx}{x^4+6x^2+5},$

c) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos x}{(x^2+1)^3}\, dx,$ d) $\displaystyle\int_{|z|=5} \frac{\exp(z)}{\cosh(z)}\, dz.$

(bitte wenden)

Aufgabe 3.

Zeigen Sie: Ist c eine isolierte, nicht hebbare Singularität von f, so ist c eine wesentliche Singularität von $\exp f$.

Aufgabe 4*.

Sei $a \in \mathbb{C},\ R > 0$ und $f : U_R(a)\backslash\{a\} \to \mathbb{C}$ holomorph.
Zeigen Sie: $\operatorname{Res}(f, a)$ ist die eindeutig bestimmte Zahl $c \in \mathbb{C}$, für welche die Funktion $g : U_R(a)\backslash\{a\} \to \mathbb{C},\ g(z) := f(z) - \dfrac{c}{z-a}$, eine Stammfunktion besitzt. Wie bestimmt man diese?