Mathematisches Institut
Abt. für Reine Mathematik
Prof. Dr. D. Wolke
Dr. K. Halupczok

29.04.2004

Übungen zur Vorlesung

Funktionentheorie

SS 2004

Blatt 2

Abgabe: Donnerstag, den 06.05.2004, vor der Vorlesung

Aufgabe 1.

Untersuchen Sie, in welchen Punkten die folgenden Funktionen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ komplex differenzierbar bzw. holomorph sind:

(a) $f(z) = |z|^2$,
(b) $f(z) = z\,\mathrm{Re}(z)$,
(c) $f(z) = \frac{z}{|z|}$ (für $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$),
(d) $f(x+iy) = x^3y^2 + ix^2y^3$,
(e) $f(z) = \max\{(|z|-1)^3, 0\}$.

Aufgabe 2.

Sei $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ harmonisch (d. h. $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ und $\Delta u = 0$).

(a) Bestimmen Sie eine Funktion $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$, so daß

$$v(x,y) := \int_0^y u_x(x,t)dt + \varphi(x)$$

die Gleichung $v_x = -u_y$ erfüllt. Ist dies möglich?

(b) Zeigen Sie: v ist harmonisches Konjugiertes zu u, d. h. v ist harmonisch und es gelten für u und v die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen.

(c) Führen Sie das obige Verfahren für $u(x,y) = x^3 - 3xy^2 + 1$ aus.

Aufgabe 3.

Sei G ein Gebiet, $G^* := \{z \in \mathbb{C}; \overline{z} \in G\}$ (G an der reellen Achse gespiegelt), $f \in H(G)$ und $f^* : G^* \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \overline{f(\overline{z})}$. Zeigen Sie, daß $f^* \in H(G^*)$.

Aufgabe 4*.

Seien $u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ harmonische Funktionen. Geben Sie eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür an, daß auch das Produkt uv wieder harmonisch ist.