Mathematisches Institut
Abt. für Reine Mathematik
Prof. Dr. D. Wolke
Dr. K. Halupczok

06.05.2004

Übungen zur Vorlesung

Funktionentheorie

SS 2004

Blatt 3

Abgabe: Donnerstag, den 13.05.2004, vor der Vorlesung

Aufgabe 1.

(a) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{k=1}^{\infty} c_k z^k$ mit

(i) $c_k = \frac{(2k)!}{2^k (k!)^2}$, (ii) $c_k = \frac{k!}{k^k}$, (iii) $c_k = \log k$.

(b) Zeigen Sie: Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n}$ hat den Konvergenzradius 1 und konvergiert an allen Randpunkten, außer bei $z = -1$.

Aufgabe 2.

Gibt es eine in einer Umgebung des Nullpunktes holomorphe Funktion f, die für alle hinreichend großen $n \in \mathbb{N}$ eine der folgenden Bedingungen erfüllt?

(a) $f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{2n+1}$, (b) $0 < |f(\frac{1}{n})| < e^{-n}$, (c) $f(\frac{1}{n}) = (1 - (-1)^n)\frac{1}{n}$.

Aufgabe 3.

Sei $f : [0, \infty) \to \mathbb{C}$ beschränkt und auf jedem Intervall $[0, A]$ Riemann-integrierbar. Zeigen Sie:

(a) Durch das uneigentliche Integral $F(z) = \int_0^{\infty} f(t)\, e^{-zt} dt$ wird eine auf der Halbebene $\{z\, ;\, \operatorname{Re} z > 0\}$ holomorphe Funktion definiert (die *Laplace-Transformierte* von f).

(b) F ist für $\operatorname{Re} z > 0$ beliebig oft differenzierbar und es gilt dort

$$F^{(k)}(z) = (-1)^k \int_0^{\infty} f(t)\, t^k\, e^{-zt} dt.$$

Warum konvergieren diese Integrale?

Aufgabe 4*.

Zeigen Sie: Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} z^{n!}$ hat den Konvergenzradius 1, und die durch sie dargestellte holomorphe Funktion auf der Einheitskreisscheibe E läßt sich nicht auf ein E echt umfassendes Gebiet holomorph fortsetzen.

(Dabei bezeichnet E die Einheitskreisscheibe $E := \{z \in \mathbb{C}\ ;\ |z| \leq 1\}$).