Mathematisches Institut
Abt. für Reine Mathematik
Prof. Dr. D. Wolke
Dr. K. Halupczok

13.05.2004

Übungen zur Vorlesung

Funktionentheorie – SS 2004
Blatt 4

Abgabe: Freitag, 21.05.2004, bis 10 Uhr in den gekennzeichneten Briefkasten Nr. 16 im Untergeschoß der Eckerstr. 1

Aufgabe 1.

a) Berechnen Sie den Hauptwert und alle möglichen anderen Werte von $\log i,\ \log\big((1+i)^3\big),\ (-1)^{\sqrt{i}},\ 2^{-i},\ (1+i)^i$.

b) Geben Sie möglichst große Gebiete an, auf denen

$$\log\log z,\ \sqrt{\log z},\ \sqrt{z+\sqrt{z}}$$

holomorph erklärt werden kann.

Aufgabe 2.

a) Bestimmen Sie eine Möbius–Transformation, welche die Punkte $i, 0, -i$ der z–Ebene der Reihe nach in die Punkte $-1, -i, 1$ der w–Ebene überführt. Gibt es mehrere solcher Transformationen?

b) Bestimmen und skizzieren Sie deren Bild der imaginären Achse, des Einheitskreises, sowie des Kreises

$$\left|z-\frac{i}{2}\right| = \frac{1}{2}.$$

c) Zeigen Sie: Die Möbius–Transformation

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad \text{mit} \ \ a,b,c,d \in \mathbb{R},\ ad-bc = 1,$$

bildet die obere Halbebene $H := \{x+iy; y>0\}$ bijektiv auf sich ab.

(bitte wenden)

Aufgabe 3.

Sei $f : \mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{C},\ z \mapsto \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$ (f heißt *Joukowski–Funktion*). Zeigen Sie:

a) f ist surjektiv. Jedes $w \in \mathbb{C}\backslash\{1, -1\}$ hat genau zwei Urbilder. Diese sind von der Form z und z^{-1}.

b) Für $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ ist $f(z)$ reell genau dann, wenn $z \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ oder $|z| = 1$ ist. Es gilt: $f(z) \in [-1, 1] \Leftrightarrow |z| = 1$.

c) f bildet die gelochte Einheitskreisscheibe $E\backslash\{0\} = \{z \in \mathbb{C};\ |z| < 1\}\backslash\{0\}$ bijektiv und konform auf $\mathbb{C}\backslash\{x \in \mathbb{R}; |x| \leq 1\}$ ab.

Aufgabe 4*.

Es sei $a \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, und die Folge $(z_n)_{n\geq 0}$ sei definiert durch den Startwert $z_0 \in \mathbb{C}$ und $z_{n+1} = \frac{1}{2}\big(z_n + \frac{a^2}{z_n}\big)$. Für welche z_0 ist die Folge $(z_n)_{n\geq 0}$ korrekt definiert, und für welche z_0 konvergiert sie? Wogegen?

Hinweis. Betrachten Sie den Ausdruck $w_n = \frac{z_n - a}{z_n + a}$.