Mathematisches Institut
Abt. für Reine Mathematik
Prof. Dr. D. Wolke
Dr. K. Halupczok

18.05.2004

Übungen zur Vorlesung

Funktionentheorie – SS 2004
Blatt 5

Abgabe: Dienstag, den 25.05.2004, vor der Vorlesung

Aufgabe 1.

(a) *Partielle Integration:* Seien $f, h : G \to \mathbb{C}$ stetig, F, H Stammfunktionen zu f bzw. h, und sei $W = ([a,b], \gamma)$ ein rektifizierbarer Weg in G. Zeigen Sie:
$$\int_W F(z)h(z)\,dz = FH\Big|_{z=\gamma(a)}^{z=\gamma(b)} - \int_W f(z)H(z)\,dz.$$

(b) *Substitutionsregel:* Sei f stetig differenzierbar auf G, $f : G \to \widetilde{G}$, sei $h : \widetilde{G} \to \mathbb{C}$ stetig, und $W = ([a,b], \gamma)$ ein rektifizierbarer Weg in G. Zeigen Sie, daß $\widetilde{W} := ([a,b], f \circ \gamma)$ ein rektifizierbarer Weg in $\widetilde{G}$ ist, und
$$\int_W h(f(z))f'(z)\,dz = \int_{\widetilde{W}} h(z)\,dz.$$

Aufgabe 2.

(a) Sei W der Rand des Quadrats mit den Ecken $1-i$, $1+i$, $-1+i$, $-1-i$, im mathematisch positiven Sinn durchlaufen. Berechnen Sie
$$\int_W \frac{dz}{z} \qquad \text{und} \qquad \int_W \frac{dz}{z^2}.$$

(b) Sei für $0 < \delta < \frac{\pi}{2}$, $r > 0$, W_δ der Weg $([-\pi+\delta, \pi-\delta], re^{it})$. Die Funktion $\sqrt{z}$ werde auf der längs der negativen reellen Achse geschlitzten Ebene durch den Hauptwert des Logarithmus definiert. Berechnen Sie
$$\int_{W_\delta} \sqrt{z}\,dz \qquad \text{und} \qquad \int_{W_\delta} \frac{1}{\sqrt{z}}\,dz.$$
Welche Grenzwerte erhält man für $\delta \to 0$?

Aufgabe 3.

(a) Sei G ein sternförmiges Gebiet. Zeigen Sie, daß jede nullstellenfreie holomorphe Funktion $f : G \to \mathbb{C}$ einen Logarithmus auf G hat.

(b) Sei $f : \mathbb{C}\backslash\{1,-1\} \to \mathbb{C}$ die Funktion $f(z) := \frac{1+z}{1-z}$. Bestimmen Sie Logarithmusfunktionen für f auf den Gebieten $\mathbb{C}\backslash(\mathbb{R}_{\leq -1} \cup \mathbb{R}_{\geq 1})$ und $\mathbb{C}\backslash[-1,1]$.

(bitte wenden)

Aufgabe 4*.

Beschreiben Sie einen Weg $W = ([0,1], \gamma)$, der die Ellipse

$$\{z = x + iy \in \mathbb{C}\ ;\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\}, \qquad a, b \in \mathbb{R}_{>0},$$

parametrisiert. Berechnen Sie das Integral $\int_W \frac{dz}{z}$ und leiten Sie daraus ab, daß

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t} = \frac{2\pi}{ab}\ .$$