Mathematisches Institut
Abt. für Reine Mathematik
Prof. Dr. D. Wolke
Dr. K. Halupczok

27.05.2004

Übungen zur Vorlesung

Funktionentheorie – SS 2004
Blatt 6

Abgabe: Dienstag, 08.06.2004, bis zum Ende der Vorlesung oder Freitag, 11.06., bis 10 Uhr in den Briefkasten Nr. 16 im Untergeschoss, Eckerstr. 1

Aufgabe 1.

1) Sei $f(0) = 1,\ f(z) = \frac{z}{e^z - 1}$ $\big(z \neq 2\pi i k,\ k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}\big)$. Dann ist f auf seinem Definitionsbereich holomorph.

2) Berechnen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, z^n.$$

3) Berechnen Sie $a_0, \ldots, a_5$.

4) Zeigen Sie $a_3 = a_5 = a_7 = \cdots = 0$.

Aufgabe 2.
Berechnen Sie die Integrale

a) $\displaystyle\int_{K_2(0)} \frac{\sin z}{z+i}\, dz$ (Kreislinie um $z_0 = 0$ vom Radius 2, im positiven Sinn durchlaufen),

b) $\displaystyle\int_{K_3(0)} \frac{\cos \pi z}{z^2 - 1}\, dz,$

c) $\displaystyle\int_{K_r(0)} \frac{dz}{(z-a)^n (z-b)^m} \quad (m, n \in \mathbb{N},\ |a| < r < |b|).$

(bitte wenden)

Aufgabe 3.
Sei $r > 0$ und V_r der Vektorraum aller Potenzreihen um den Nullpunkt mit Konvergenzradius $> r$. Beweisen Sie

a) Durch $< f, g >:= \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int\limits_0^{2\pi} f(re^{i\varphi})\, \overline{g(re^{i\varphi})} d\varphi$ ist eine positiv–definite hermitesche Bilinearform auf V_r definiert.

b) Die Funktionen $e_n(z) := r^{-n} z^n \quad (n \in \mathbb{N})$ bilden eine Orthonormalsystem in V_r.

c) Für alle

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu\, z^\nu, \quad g(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu\, z^\nu \quad \text{aus} \quad V_r \quad \text{gilt} \quad < f, g >= \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu\, \overline{b_\nu}\, r^{2\nu}.$$

Aufgabe 4*.
Es sei $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\, z^n$ mit $a_n \in \mathbb{R}$, $a_n \geq 0$, eine Potenzreihe vom Konvergenzradius $r = 1$.
Zeigen Sie: F hat keine holomorphe Fortsetzung in ein Gebiet, das $z = 1$ enthält.