Mathematisches Institut
Abt. für Reine Mathematik
Prof. Dr. D. Wolke
Dr. K. Halupczok

08.06.2004

Übungen zur Vorlesung

Funktionentheorie – SS 2004
Blatt 7

Abgabe: Dienstag, 15.06.2004, vor der Vorlesung

Aufgabe 1.
Zeigen Sie

$$\int_0^\infty \cos(x^2) = \int_0^\infty \sin(x^2) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

Hinweis: Integrieren Sie $f(x) = \exp(iz^2)$ entlang dem Weg $W = W_1 + W_2 + W_3$, wobei W_1 die Strecke von 0 nach R $(R > 0)$, W_2 den Kreisbogen um 0 von R bis $R\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ und W_3 die Strecke von $R\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ bis 0 bezeichnet. Verwenden Sie

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \lim_{R\to\infty} \int_0^R e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Aufgabe 2.
Bestimmen Sie alle ganzen Funktionen f mit den Eigenschaften

$$f(0) = 0, \quad f(z) + f''(z) = 2\cos z \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Aufgabe 3.
Entwickeln Sie die folgenden Funktionen in eine Potenzreihe um den Nullpunkt. Geben Sie jeweils den Konvergenzradius an.

a) $e^{z+i\pi}$, b) $(\sin z)^2$ c) $\cos(z^2 - 1)$, d) $\frac{2z+1}{(z^2+1)(z+1)^2}$.

(bitte wenden)

Aufgabe 4*.

Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ein komplexes Polynom vom Grad n mit den – nicht notwendig verschiedenen – Nullstellen $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$.

1) Es gilt für $z \in \mathbb{C} \backslash \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{z - \alpha_1} + \cdots + \frac{1}{z - \alpha_n} = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\overline{z - \alpha_\nu}}{|z - \alpha_\nu|^2}.$$

2*) Sei β Nullstelle von f'. Dann gibt es $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ mit $\lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0$, $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1$ und $\beta = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \, \alpha_j$, d.h. die Nullstellen von f' liegen in der „konvexen Hülle" der Nullstellenmenge von f (Satz von Gauß–Lucas).