Mathematisches Institut
Abt. für Reine Mathematik
Prof. Dr. D. Wolke
Dr. K. Halupczok

17.06.2004

Übungen zur Vorlesung
Funktionentheorie – SS 2004
Blatt 8

Abgabe: Donnerstag, 24.06.2004, vor der Vorlesung

Aufgabe 1.

a) Seien f und g holomorph auf G. Für ein $z_0 \in G$ und ein $N_0 \in \mathbb{N}$ gelte $f^{(n)}(z_0) = g^{(n)}(z_0)$ für alle $n \geq N_0$. Zeigen Sie, daß $f - g$ ein Polynom ist. Welchen Grad hat es höchstens?

b) Zeigen Sie: Für eine ganze Funktion f ist äquivalent:

(i) $\exists\, M, R > 0 \,\forall\, z \in \mathbb{C},\ |z| \geq R: \ \bigl|f(x)\bigr| \leq M|z|^n$
(ii) f ist Polynom vom Grad $\leq n$.

Welchen Satz erhält man für $n = 0$?

Aufgabe 2.

Beweisen Sie, daß $F_2(z) = \dfrac{1}{1+i} \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \Bigl(\frac{z+i}{1+i}\Bigr)^n$ eine analytische Fortsetzung von $F_1(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ ist.

Aufgabe 3.

a) Seien $w_1, w_2 \in \mathbb{C}$ über $\mathbb{R}$ linear unabhängig. Bestimmen Sie alle ganzen Funktionen f mit

$$\forall\, z \in \mathbb{C}: \ f(z + w_1) = f(z + w_2) = f(z).$$

b) Sei $P(x, y)$ ein von Null verschiedenes Polynom in zwei Variablen. Zeigen Sie: Falls für eine holomorphe Funktion f

$$P\bigl(\operatorname{Re} f(z), \operatorname{Im} f(z)\bigr) \equiv 0$$

gilt, dann ist f konstant.

Aufgabe 4*.

Zeigen Sie, daß es keine auf $E = \{z \in \mathbb{C};\ |z| < 1\}$ holomorphe Funktion f mit $\lim\limits_{|z| \to 1} \bigl|f(z)\bigr| = \infty$ gibt.

Hinweis: Betrachten Sie zunächst den Fall, daß f keine Nullstelle hat.