Mathematisches Institut
Abt. für Reine Mathematik
Prof. Dr. D. Wolke
Dr. K. Halupczok

24.06.2004

Übungen zur Vorlesung

Funktionentheorie – SS 2004
Blatt 9

Abgabe: Donnerstag, 01.07.2004, vor der Vorlesung

Aufgabe 1.

Bestimmen Sie alle Werte für $\int\limits_W \frac{dz}{1+z^2}$, wobei für W alle geschlossenen, rektifizierbaren Wege zugelassen sind, auf denen der Integrand holomorph ist.

Aufgabe 2.

Zeigen Sie den „Identitätssatz für Dirichlet–Reihen“:
Die Dirichlet–Reihen

$$A(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} \quad \text{und} \quad B(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^s}$$

seien absolut konvergent für $\operatorname{Re} s \geq c$, und es gelte $A(s_k) = B(s_k)$ für eine Folge (s_k) aus $\mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} s_k \geq c$ und $\operatorname{Re} s_k \to \infty$ für $k \to \infty$. Dann gilt $a_n = b_n$ für alle n.

Aufgabe 3.

Zeigen Sie, daß die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nz)}{2^n}$ im Gebiet $G = \{z \in \mathbb{C},\ |\operatorname{Im} z| < \ln 2\}$ kompakt konvergiert. Konvergiert sie kompakt in einer echten Erweiterung von G?

Aufgabe 4*.

Die Potenzreihe $f(z) = \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$ habe einen Konvergenzradius $> r$. Beweisen Sie für die n–te Partialsumme $s_n(z) := \sum\limits_{\nu=0}^{n} a_\nu z^\nu$ die folgende Minimaleigenschaft: für jedes Polynom $p(z)$ vom Grad $\leq n$ gilt

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \left| f(re^{i\varphi}) - s_n(re^{i\varphi}) \right|^2 d\varphi \leq \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \left| f(re^{i\varphi}) - p(re^{i\varphi}) \right|^2 d\varphi,$$

und „=“ gilt genau dann, wenn $p(z) = s_n(z)$ ist; das Minimum hat den Wert $\sum\limits_{\nu>n} |a_\nu|^2 r^{2\nu}$.