D. Wolke

Manuskript zur Vorlesung
Analytische Zahlentheorie

WS 2001/02

Einleitung. Etwa seit Euler werden in der Zahlentheorie reell– oder komplex–analytische Hilfsmittel verwendet. Das Studium erzeugender Potenzreihen $\sum_n f(n)\, z^n$, Dirichlet–Reihen $\sum_n f(n)\, n^{-s}$ oder Exponentialsummen

$$\sum_{n\le x} f(n) \exp\big(2\pi i\, nt\big) \quad (z, s \in \mathbb{C},\ t \in \mathbb{R})$$

erlaubt es vielfach, systematisch Eigenschaften der zahlentheoretischen Funktion f herzuleiten. Ein einfaches Beispiel möge das Schema

1. Zahlentheoretisches Objekt f,
2. Erzeugende Funktion F,
3. Studium der analytischen Eigenschaften von F,
4. Rückschluß von F auf f

erläutern:

Die **Fibonacci–Folge** (f_n) (Fibonacci = Leonardo von Pisa, 1170? – 1250?) wird rekursiv definiert durch

$$f_1 = 1, \quad f_2 = 1, \quad f_{n+2} = f_n + f_{n+1} \quad (n \ge 1).$$

Die erzeugende Potenzreihe

$$F(z) \underset{\text{Df}}{=} \sum_{\nu=0}^{\infty} f_{\nu+1}\, z^\nu$$

konvergiert wegen $f_{\nu+1}/f_\nu \le 2$ wenigstens für $|z| < 1/2$. Aus der Rekursionsformel schließt man

$$F(z) - z\,F(z) - z^2\,F(z) = 1,$$
$$F(z) = \frac{-1}{z^2+z-1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{z-z_2} - \frac{1}{z-z_1}\right)$$

mit

$$z_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \quad z_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}.$$

Durch Entwickeln in geometrische Reihen folgt

$$F(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{\nu+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{\nu+1} \right) z^{\nu}.$$

Der Identitätssatz zeigt, daß die Koeffizienten dieser Reihe mit den $f_{\nu+1}$ übereinstimmen.

Während Potenzreihen hauptsächlich bei additiven Problemen (Waring–Problem, Partitionen) benutzt werden, nimmt man bei zahlentheoretischen Funktionen mit Faltungseigenschaften als erzeugende Funktionen eher die zugeordneten Dirichlet–Reihen. Aus der großen Fülle von Themen sollen in dieser Vorlesung hauptsächlich Primzahl–Fragen behandelt werden. Als begleitende Lektüre kann das Buch von **J. Brüdern: „Einführung in die analytische Zahlentheorie“** empfohlen werden. Die historische Entwicklung des Gebietes wird sehr ausführlich in dem Buch **„The Development of Prime Number Theory“** von **W. Narkiewicz** beschrieben.

Bezeichnungen
$d, k, \ell, m, n, r \in \mathbb{N}, \quad s = \sigma + i\tau, \ w = u + iv, \ z \in \mathbb{C},$
$\sigma, \tau, u, v, x, y, t, \alpha, \beta, \in \mathbb{R}, p, q \in \mathbb{P} =$ Menge der Primzahlen.

1. Kapitel. Dirichlet–Reihen

1.1. Def. Sei $a_n \in \mathbb{C} \quad (n \in \mathbb{N})$. Dann heißt $\sum\limits_{n \in \mathcal{N}} a_n n^{-s}$ die der Folge (a_n) zugeordnete **Dirichlet–Reihe**. Die a_n heißen die **Koeffizienten** der Reihe.

Während bei Potenzreihen die Konvergenzbereiche Kreise in $\mathbb{C}$ sind, sind es bei Dirichlet–Reihen nach rechts geöffnete Halbebenen.

1.2. Satz und Def.
(1) Eine Dirichlet–Reihe $\sum a_n n^{-s}$ konvergiert entweder für alle $s \in \mathbb{C}$ oder nirgends oder es existiert ein $\sigma_0 \in \mathbb{R}$, so daß die Reihe für $\sigma = \mathrm{Re}\ s > \sigma_0$ konvergiert und für $\sigma < \sigma_0$ divergiert. σ_0 heißt die **Konvergenz–Abszisse** der Reihe.

$$\sigma_0 = \inf\{\sigma \in \mathbb{R}, \ \exists\, \tau : \ \text{Konvergenz bei } s = \sigma + i\tau\}$$

Man setzt

$$\sigma_0 = -\infty, \ \text{falls die Reihe überall konvergiert,}$$
$$\sigma_0 = \infty, \ \text{falls kein Konvergenzpunkt existiert,}$$

(2) Im Fall $\sigma_0 \in \mathbb{R}$ konvergiert $F(s) = \sum a_n n^{-s}$ kompakt in der offenen Halbebene

$$H_{\sigma_0} \underset{\mathrm{Df}}{=} \{s = \sigma + i\tau, \ \sigma > \sigma_0\}$$

und stellt dort eine holomorphe Funktion dar.

Im Fall $\sigma_0 = -\infty$ ist F eine ganze Funktion.

Beweis.
1. Daß „Konvergenz überall“ und „Divergenz überall“ eintreten können, sieht man an den Beispielen $a_n = \frac{1}{n!}$ und $a_n = n!$

2. $\sum a_n\, n^{-s}$ konvergiere bei $s = 0$, d.h. $\sum a_n$ konvergiert, bzw.

$$r_N \underset{\text{Df}}{=} \sum_{n>N} a_n \to \text{o} \quad \text{für} \quad N \to \infty.$$

Für $0 < \delta < \frac{\pi}{2}$ beschreibt

$$T_\delta = \big\{s,\ |\arg s| \le \frac{\pi}{2} - \delta\big\}$$

einen Trichter, mit der Spitze in $s = 0$, dem Öffnungswinkel $\pi - 2\delta$, und nach rechts geöffnet. Sei $1 < M < N$ $(M, N \in \mathbb{N})$. Dann gilt für $\sigma > 0$

$$\sum_{n=M}^{N} a_n\, n^{-s} = \sum_{M\le n\le N} \frac{r_{n-1} - r_n}{n^s} \tag{2.1}$$
$$= \sum_{M\le n\le N} r_n\Big(\frac{1}{(n+1)^s} - \frac{1}{n^s}\Big) + \frac{r_{M-1}}{M^s} - \frac{r_N}{(N+1)^s}.$$

$$\Big|\frac{1}{(n+1)^s} - \frac{1}{n^s}\Big| = \Big|s \int_n^{n+1} \frac{du}{u^{s+1}}\Big| \tag{2.2}$$
$$\le |s| \int_n^{n+1} \frac{du}{u^{\sigma+1}} = \frac{|s|}{\sigma}\,\Big(\frac{1}{n^\sigma} - \frac{1}{(n+1)^\sigma}\Big).$$

Sei $\varepsilon > 0$. Dann ist $|r_n| \le \varepsilon$ für $n_0(\varepsilon) \le M - 1 \le n$, also nach (2.1) und (2.2) für $s \in T_\delta \backslash \{0\}$ und $M > n_0(\varepsilon)$

$$\Big|\sum_{M\le n\le N} \frac{a_n}{n^s}\Big| \le \varepsilon\,\frac{|s|}{\sigma} \sum_{M\le n\le N} \Big(\frac{1}{n^\sigma} - \frac{1}{(n+1)^\sigma}\Big) + \frac{\varepsilon}{M^\sigma} + \frac{\varepsilon}{(N+1)^\sigma}$$
$$\le \varepsilon\Big(\frac{|s|}{\sigma}\Big(\frac{1}{M^\sigma} - \frac{1}{(n+1)^\sigma}\Big) + 2\Big) \le \varepsilon(\operatorname{cosec}\delta + 2).$$

Hiermit ist die gleichmäßige Konvergenz der Reihe in T_δ gezeigt.

3. Der Fall, daß Konvergenz bei $s_1 \in \mathbb{C}$ vorliegt, wird durch die Verschiebung $a'_n = \frac{a_n}{n^{s_1}}$ und die Konvergenz von $\sum a'_n\, n^{-s}$ bei $s = 0$ auf **2.** zurückgeführt.

4. Wird σ_0 wie im Satz definiert, dann kann jedes Kompaktum in H_{σ_0} in einen rechts offenen Trichter, dessen Spitze in einem Konvergenzpunkt liegt, eingebettet werden. Dort hat man gleichmäßige Konvergenz. Mit dem Weierstraßschen Konvergenzsatz ist damit die Holomorphie der durch die Reihe dargestellten Funktionen in H_{σ_0} gegeben.

Bemerkungen

1. Der Konvergenzradius einer Potenzreihe $\sum\limits_{n\in\mathcal{N}_0} a_n\, z^n$ wird nach Cauchy–Hadamard durch $\left(\overline{\lim}\,|a_n|^{1/n}\right)^{-1}$ berechnet. Eine ähnliche Formel besteht für die Konvergenzabszisse σ_0 der Dirichlet–Reihe $\sum a_n\, n^{-s}$. Sei $S_n = a_1 + \cdots + a_n$ und $r_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots$, falls $\sum a_n$ konvergiert.

$$\alpha \underset{\text{Df}}{=} \limsup_{n\to\infty} \frac{\ln|S_n|}{\ln n}, \quad \beta \underset{\text{Df}}{=} \limsup_{n\to\infty} \frac{\ln|r_n|}{\ln n}.$$

Dann gilt

$$\sigma_0 = \alpha \quad (\geq 0), \quad \text{falls} \quad \sum a_n \quad \text{divergiert},$$
$$\sigma_0 = \beta \quad (\leq 0), \quad \text{falls} \quad \sum a_n \quad \text{konvergiert}.$$

2. Während bei Potenzreihen die Kreise der gewöhnlichen und der absoluten Konvergenz (bis auf Randpunkte) zusammenfallen, können bei Dirichlet–Reihen die Bereiche der gewöhnlichen und absoluten Konvergenz sich deutlich unterscheiden. Wie im obigen Beweis zeigt man die Existenz eines $\overline{\sigma} \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ mit der Eigenschaft, daß für $\sigma > \overline{\sigma}$ absolute Konvergenz und für $\sigma < \overline{\sigma}$ keine absolute Konvergenz vorliegt. Es gilt im Fall $\sigma_0 \in \mathbb{R}$

$(*)$ $\qquad \sigma_0 \leq \overline{\sigma} \leq \sigma_0 + 1.$

d.h. es kann einen Vertikalstreifen der Breite Eins mit abweichendem Verhalten geben. Dies ist an den Reihen

$$\sum n^{-s} \quad (\sigma_0 = \overline{\sigma} = 1),$$
$$\sum (-1)^n\, n^{-s} \quad (\sigma_0 = 0, \overline{\sigma} = 1)$$

zu sehen.
Hinweis zu $(*)$. Ist $\sum a_n\, n^{-s}$ bei $s_1 \in \mathbb{C}$ konvergent, dann ist insbesondere $(b_n) = (a_n\, n^{-s_1})$ beschränkt, etwa durch B. Für $\varepsilon > 0$ sieht man

$$\sum \left|a_n\, n^{-s_1-1-\varepsilon}\right| \leq B \sum n^{-1-\varepsilon},$$

d.h. absolute Konvergenz bei $s_1 + 1 + \varepsilon$.

3. Nach dem Satz von Weierstraß darf eine Reihe holomorpher Funktionen in einem Gebiet mit kompakter Konvergenz dort gliedweise differenziert werden. Die so entstehende Reihe ist ebenfalls kompakt konvergent und stellt die Ableitung der Grenzfunktion der Reihe dar. Ist

$$F(s) = \sum_n a_n\; n^{-s} \quad (\operatorname{Re} s > \sigma_0),$$

dann ergibt sich mit

$$\frac{d}{ds}\; n^{-s} = \frac{d}{ds}\, e^{s \ln n} = -\ln n \cdot n^{-s}$$

$$F^{(k)}(s) = (-1)^k \sum_n a_n (\ln n)^k \, n^{-s} \quad (k \in \mathbb{N}, \sigma > \sigma_0). \tag{3.1}$$

Der Grund der Nützlichkeit von Dirichlet–Reihen bei zahlentheoretischen Funktionen mit Faltungseigenschaften liegt in dem sehr leicht zu beweisenden

1.3. Multiplikationssatz für Dirichlet–Reihen.
Seien $F(s) = \sum_n a_n \, n^{-s}$ und $G(s) = \sum_n b_n \, n^{-s}$ absolut konvergent. Dann hat $H(s) = F(s)\,G(s)$ die Gestalt $\sum_n c_n \, n^{-s}$ mit $c = a * b$ (Faltprodukt, d.h. $c_n = \sum_{d|n} a_d \, b_{n/d}$).
Die Reihe $\sum_n c_n \, n^{-s}$ konvergiert ebenfalls absolut.

Nach dem Produktsatz für Reihen und der vorausgesetzten absoluten Konvergenz kann $F(s)\,G(s)$ ausmultipliziert und in beliebiger Anordnung aufsummiert werden:

$$\begin{aligned} F(s)\,G(s) &= \sum_{n,m\in\mathcal{N}} a_n \, b_m (nm)^{-s} \\ &= \sum_{k\in\mathcal{N}} k^{-s} \sum_{n,m,nm=k} a_n \, b_m = \sum_k c_k \, k^{-s}. \end{aligned}$$

Zum Beispiel folgt für $\sigma > 1$, wegen $d(n) = (\underline{1} * \underline{1})(n)$

$$\sum_n d(n) \, n^{-s} = \big(\sum_n n^{-s}\big)^2.$$

So wie der Identitätssatz für Potenzreihen Koeffizientenvergleich erlaubt, ist dies auch für Dirichlet–Reihen möglich.

1.4. Identitätssatz für Dirichlet–Reihen.
Die Dirichlet–Reihen $F(s) = \sum_n a_n \, n^{-s}$ und $G(s) = \sum_n b_n \, n^{-s}$ seien konvergent für $\sigma > \sigma_0$. Es gebe eine Folge $(s_m) = (\sigma_m + i\tau_m)$ mit

(i) $\sigma_m \to \infty$ für $m \to \infty$ und
(ii) $\forall\, m : F(s_m) = G(s_m)$.

Dann gilt

$$\forall\, n : a_n = b_n.$$

Beweis. 1. Es werde $c_n = a_n - b_n$ gesetzt. Dann verschwindet $H(s) = \sum_n c_n \, n^{-s}$ an den Stellen $s = s_m$. Es kann davon ausgegangen werden, daß H bei $s = 0$ absolut konvergiert (andernfalls arbeite man mit $c_n^* = c_n \, n^{-s^*}$ für ein geeignetes s^*). Es werde auch $\sigma_m > 1\,\forall\, m$ angenommen.

2. Es muß $\forall\, n : c_n = 0$ gezeigt werden. Angenommen, dies sei falsch und n_0 der kleinste Index mit $c_n \neq 0$. Dann ergibt sich für alle $m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} 0 < \frac{|c_{n_0}|}{n_0^{\sigma_m}} &\leq \sum_{n>n_0} |c_n|\, n^{-\sigma_m} \leq B \sum_{n>n_0} n^{-\sigma_m}. \\ &< B \int_{n_0}^{\infty} t^{-\sigma_m} dt = B\, \frac{n_0^{1-\sigma_m}}{\sigma_m - 1}, \\ \sigma_m - 1 &\leq B |c_{n_0}|\, n_0. \end{aligned}$$

Die letzte Ungleichung wird für $m \to \infty$ widersprüchlich.

1.5. Satz von Landau. Die Dirichlet–Reihe $F(s) = \sum\limits_n a_n\, n^{-s}$ habe die Konvergenzabszisse $\sigma_0 \in \mathbb{R}$. Es gelte $\forall\, n : a_n \geq 0$. Dann ist F nicht in den Punkt $s = \sigma_0$ holomorph fortsetzbar.

Beweis. Es werde OBdA $\sigma_0 = 0$ angenommen. Sei F in den Punkt $s = 0$ fortsetzbar. Dann ist F holomorph in $H_+ = \{s = \sigma + i\tau, \sigma > 0\}$, erweitert um einen Kreis vom Radius $\delta_1 > 0$ um $s = 0$. Insbesondere ist F holomorph im Kreis vom Radius $1 + \delta_2$ ($\delta_2 > 0$) um $s = 1$. F werde um $s = 1$ Taylor–entwickelt. Dazu benutzt man

$$F^{(k)}(1) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^k\, a_n (\ln n)^k\, n^{-1}.$$

Da $s^* = -\frac{1}{2}\,\delta_2$ im Holomorphiekreis um 1 liegt, ergibt sich

$$\begin{aligned} F(s^*) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{F^{(k)}(1)}{k!} (s^* - 1)^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} (-1)^k \left(1 + \frac{1}{2}\,\delta_2\right)^k \sum_{n=1}^{\infty} a_n (\ln n)^k\, n^{-1}. \end{aligned}$$

Die Doppelreihe $\sum\limits_k \sum\limits_n$ hat nach Voraussetzung nur nichtnegative Summanden. Die Reihe $\sum\limits_k$ ist Potenzreihe und konvergiert absolut. Die Doppelreihe konvergiert somit und kann umgeordnet werden.

$$\begin{aligned} F\Big(-\frac{1}{2}\,\delta_2\Big) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, n^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\Big(1 + \frac{1}{2}\,\delta_2\Big) \ln n\right)^k \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, n^{-1} \exp\left(\Big(1 + \frac{1}{2}\,\delta_1\Big) \ln n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, n^{-(-1/2\delta_2)}. \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung besagt, daß die Dirichlet–Reihe für F bei $-\frac{1}{2}\,\delta_2$ konvergiert, was der Voraussetzung $\sigma_0 = 0$ widerspricht.

Aufgaben.

1. Bestimmen Sie die Konvergenzabszisse zu den Dirichlet–Reihen mit den Koeffizienten

a) $a_n = n^{-1/2}$,
b) $a_n = (-1)^n\, n^{-1/2}$,
c) $a_n = \ln n$,
d) $a_n = 1$, falls $n = k^2$, $a_n = 0$ sonst.

Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit der Aussage von Bem. 1 zu Satz 1.2.

2. Die Dirichlet–Reihe $F(s) = \sum\limits_n a_n\, n^{-s}$ sei absolut konvergent für $\sigma > \bar\sigma$. Zeigen Sie für $\sigma > \bar\sigma$ den Mittelwertsatz

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int\limits_{-T}^{T} \big|f(\sigma+it)\big|^2 dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|^2}{n^{2\sigma}}.$$

3. Geben Sie ein Beispiel einer Funktion an, die in der rechten Halbebene holomorph ist, dort aber nicht als Dirichlet–Reihe geschrieben werden kann.

4. Die Dirichlet–Reihe $F(s) = \sum\limits_n a_n\, n^{-s}$ sei für $\sigma > \bar\sigma$ absolut konvergent. Zeigen Sie für $\sigma > \bar\sigma$ und $\alpha \geq 1$

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int\limits_{-T}^{T} F(\sigma+it)\, \alpha^{\sigma+it} dt = \begin{cases} a_n, & \text{falls} \quad \alpha = n \in \mathbb{N}, \\ 0, & \text{falls} \quad \alpha \notin \mathbb{N}. \end{cases}$$

2. Kapitel. Die Riemannsche Zeta–Funktion, I

2.1. Def. Die Dirichlet–Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ konvergiert kompakt und abslolut für $\sigma > 1$. Die dort dargestellte holomorphe Funktion heißt **Riemannsche Zeta–Funktion** $\zeta(s)$.

Bemerkung. Die Reihe wurde – allerdings nur für reelle $s > 1$ – zwischen 1734 und 1748 schon von Euler betrachtet. Von ihm stammen die berühmten Formeln

$$\zeta(2n) = \frac{(-1)^{n-1} B_{2n}}{2(2n)!}\, (2\pi)^{2n} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Die B_k sind die **Bernoulli–Zahlen**, definiert durch

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!}\, z^n \qquad (|z| < 2\pi).$$

Für $\zeta(2n+1)$ ist bis heute keine vergleichbare Formel bekannt.

In dem 1860 erschienenen Artikel „Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Größe“ definierte Bernhard Riemann die Funktion erstmals für komplexe s und erkannte ihre Bedeutung für die Untersuchung der Primzahlen.

2.2. Satz. Die Funktion $\zeta(s)-\frac{1}{s-1}$ ist in die Halbebene $\{s, \sigma > 0\}$ analytisch fortsetzbar. Für $\sigma > 0$ und $N \in \mathbb{N}$ gilt

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \frac{1}{2} - s \int_1^\infty B_1(t)\, t^{-s-1} dt, \tag{1}$$

$$\zeta(s) = \sum_{n \le N} \frac{1}{n^s} - s \int_N^\infty B_1(t)\, t^{-s-1} dt + \frac{N^{1-s}}{s-1} - \frac{1}{2N^s}. \tag{2}$$

Anders ausgedrückt: $\zeta(s)$ kann in die Halbebene $\{s, \sigma > 0\}$ bis auf einen Pol erster Ordnung mit Residuum 1 bei $s = 1$ analytisch fortgesetzt werden.

B_1, das „erste **Bernoulli–Polynom**“, ist definiert durch

$$B_1(t) = t - [t] - \frac{1}{2}$$

$\big(B_1$ ist 1–periodisch, $-\frac{1}{2} \le B_1(t) < \frac{1}{2}\big)$.

Beweis zu (1). Für $M \in \mathbb{N}$, $\sigma > 1$ sieht man mit partieller Summation

$$\begin{aligned}
\sum_{n \le M} \frac{1}{n^s} &= M \cdot M^{-s} + s \int_1^M [t]\, t^{-s-1} dt \\
&= M^{1-s} - s \int_1^M B_1(t)\, t^{-s-1} dt + s \int_1^M \big(t - \frac{1}{2}\big)\, t^{-s-1}\, dt \\
&= \frac{1}{s-1} - s \int_1^M B_1(t)\, t^{-s-1} dt + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\, M^{-s} - \frac{M^{1-s}}{s-1}.
\end{aligned}$$

Für $\sigma > 1$ gehen bei $M \to \infty$ die beiden letzten Terme gegen Null, also

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} - s \int_1^\infty B_1(t)\, t^{-s-1}\, dt + \frac{1}{2} \tag{$*$}$$

Wegen $\big|B_1(t)\big| \le \frac{1}{2}$ konvergiert das uneigentliche Integral kompakt für $\sigma > 0$ und stellt dort eine holomorphe Funktion dar. $(*)$ beschreibt somit die analytische Fortsetzung von $\zeta(s) - \frac{1}{s-1}$ in die Halbebene $\sigma > 0$.

(2), das erst in Kapitel 4 benutzt wird, zeigt man analog mit

$$\zeta(s) = \lim_{M \to \infty, M > N} \Big(\sum_{n \le N} \frac{1}{n^s} + \sum_{N < n \le M} \frac{1}{n^s} \Big) \quad (\sigma > 1).$$

Bemerkung. $(*)$ liefert zwar einen geschlossenen Ausdruck für $\zeta(s)$ in $\sigma > 0$, dieser ist aber bei weitem nicht so ergiebig wie die Reihe oder das im Folgenden angegebene Euler–Produkt. Ähnlich verhält es sich mit anderen Darstellungen von $\zeta(s)$ im Streifen

$0 < \sigma < 1$. Dementsprechend läßt $\zeta(s)$ hier noch viele entscheidende Fragen offen.

2.3. Satz. Für $\sigma > 1$ bestehen die Formeln

(1) $\zeta^k(s) = \sum_{n \in \mathcal{N}} d_k(n)\, n^{-s} \quad \big(k \in \mathbb{N},\ d_k(n) = \big\{(m_1, \ldots, m_k) \in \mathbb{N}^k,\ m_1 \ldots m_k = n\big\}\big)$,

(2) $1/\zeta(s) = \sum_n \mu(n)\, n^{-s}$. Insbesondere gilt $\zeta(s) \neq 0$ für $\sigma > 1$.

(3) $-\xi'(s)/\zeta(s) = \sum_n \Lambda(n)\, n^{-s}$.

Die Aussagen sind Beispiele für den Produktsatz für Dirichlet–Reihen. (1) ergibt sich aus $d_k = \underline{1} * \ldots * \underline{1}$ (k–faches Produkt).

Wegen $\underline{1} * \mu = \varepsilon$ und der absoluten Konvergenz von $\sum \mu(n)\, n^{-s}$ für $\sigma > 1$ ist

$$(*) \qquad \zeta(s) \sum_n \mu(n)\, n^{-s} = \sum_n \varepsilon(n)\, n^{-s} = 1.$$

Da ζ und die μ–Reihe für $\sigma > 1$ holomorph sind, kann nach $(*)$ dort keine ζ–Nullstelle auftreten. (3) ergibt sich mit $\underline{1} * \Lambda = \ln$ und der in Kapitel 1 hergeleiteten Formel $\sum_n \ln n \cdot n^{-s} = -\zeta'(s)$.

Aus der Funktionentheorie weiß man, daß es wichtig ist, die isolierten Singularitäten einer Funktion zu kennen. Für das Studium von Λ bzw. $\psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n)$ wird es darauf ankommen, die isolierten Singularitäten von $-\zeta'/\zeta(s)$ in $\sigma > 0$ zu ermitteln. Der Pol von ζ bei $s = 1$ bewirkt einen Pol von $-\zeta'/\zeta$ bei $s = 1$. Weitere Pole können nur durch Nullstellen von $\zeta(s)$ entstehen. Das Untersuchen der Nullstellen von $\zeta(s)$ wird sich als zentrales und höchst schwieriges Problem der Zeta–Theorie entpuppen.

2.4. Hilfssatz. Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ multiplikativ und $\sum_n \big|f(n)\big| < \infty$. Dann gilt

$$\sum_n f(n) = \prod_p \big(1 + f(p) + f(p^2) + \ldots\big).$$

Beweis. Für $N \leq 2$ sei

$$\Pi(N) = \prod_{p \leq N} \big(1 + f(p) + f(p^2) + \ldots\big)$$

(Als Teilreihe von $\sum_n f(n)$ konvergiert jede Summe $1 + f(p) + f(p^2) + \ldots$ absolut). Das endliche Produkt $\Pi(N)$ kann ausmultipliziert und beliebig umgeordnet werden. Mit der Multiplikativität von f und dem Satz von der eindeutigen Primfaktorzerlegung erweist es sich als $\sum_n{}' f(n)$, wobei $\sum'$ bedeutet, daß über alle n summiert wird, in deren

kanonischer Zerlegung nur Primfaktoren $\leq N$ auftreten. Man sieht damit

$$\Big|\sum_n f(n) - \Pi(N)\Big| \leq \sum_{n>N} \big|f(n)\big| + \sum_{\substack{n>N \\ p|n \Rightarrow p\leq N}} \leq 2\sum_{n>N} \big|f(n)\big|.$$

Für $N \to \infty$ geht die rechte Seite gegen Null, womit die Konvergenz des Produktes gegen $\sum f(n)$ gezeigt ist.

Zusatz. Ist f vollständig multiplikativ $\big($d.h. $\forall\, m,n : f(mn) = f(m)\,f(n)\big)$, dann gilt

$$\sum_n f(n) = \prod_p \big(1 - f(p)\big)^{-1}.$$

(Es muß $\forall\, p : f(p) \neq 1$ gelten, da sonst $\sum\limits_{\nu\geq 0} f(p^\nu)$ nicht konvergiert).

2.5. Euler–Produkt für $\zeta(s)$.
Für $\sigma > 1$ gilt

$$\zeta(s) = \prod_p \Big(1 - \frac{1}{p^s}\Big)^{-1}.$$

Beweis. Die Voraussetzungen des Hilfssatzes sind offenbar mit $f(n) = \frac{1}{n^s}$ erfüllt.

Mit Hilfe des Euler–Produktes können zahlreiche Formeln für Dirichlet–Reihen $\sum\limits_n f(n)\,n^{-s}$ mit multiplikativem f hergeleitet werden.
Ein Beispiel:

$$\sum_n \mu^2(n)\,n^{-s} = \zeta(s)/\zeta(2s) \qquad (\sigma > 1).$$

Die linke Seite ist nach dem Hilfssatz $= \prod\limits_p \big(1 + \frac{1}{p^s}\big)$. Die rechte Seite berechnet sich nach 2.5. zu

$$\prod_p \Big(1 - \frac{1}{p^s}\Big)^{-1}\Big(1 - \frac{1}{p^{2s}}\Big) = \prod_p \Big(1 - \frac{1}{p^s}\Big)^{-1}\Big(1 - \frac{1}{p^s}\Big)\Big(1 + \frac{1}{p^s}\Big).$$

Beide Seiten sind identisch.

Alle bislang bekannten analytischen Beweise zum Primzahlsatz nutzen aus, daß $\zeta(s)$ auf der Vertikalen $s = 1 + i\tau$ nicht verschwindet. Während die bisher hergeleiteten Aussagen zu $\zeta(s)$ keine besonderen Ideen erforderten, ist jetzt einige Intuition nötig. Die Tatsache $\zeta(1+it) \neq 0$ wurde erstmals 1896 von Jaques Hadamard (1866–1963) und Charles de la Vallée–Poussin (1866–1962) mit verschiedenen Methoden bewiesen. Der hier beschriebene Beweis mit der cos–Ungleichung folgt der Version von de la Vallée–Poussin.

2.6. Satz. Für $\tau \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ gilt $\zeta(1 + i\tau) \neq 0$.

Beweis.
1. Für jedes $\varphi \in \mathbb{R}$ ist

$$3 + 4\cos\varphi + \cos(2\varphi) = 2(1+\cos\varphi)^2 \geq 0.$$

2. Für $\sigma > 1$ und $\tau \neq 0$ sei

$$V(\sigma,\tau) = \mathrm{Re}\,\Big(3\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma) + 4\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma+i\tau) + \frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma+2i\tau)\Big)$$

Dann sieht man mit 2.3 (3) und 1.

$$\begin{aligned} V(\sigma,\tau) &= -\mathrm{Re}\,\Big(\sum_n \frac{\Lambda(n)}{n^\sigma}\big(3 + 4n^{-i\tau} + n^{-2i\tau}\big)\Big) \\ &= -\sum_n \frac{\Lambda(n)}{n^\sigma}\big(3 + 4\cos(-\tau\ln n) + \cos(-2\tau\ln n)\big) \leq 0. \end{aligned}$$

3. Angenommen, ζ verschwinde bei $1+i\tau$ von m–ter Ordnung,

$$\zeta(\sigma+i\tau) = (\sigma-1)^m\,\tilde{h}_1(\sigma-1)$$

mit einem in einer Umgebung der Null differenzierbaren $\tilde{h}_1$ und $\tilde{h}_1(0) \neq 0$. Dann folgt

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma+i\tau) = \frac{m}{\sigma-1} + h_1(\sigma-1) \qquad (\sigma > 1) \tag{3.1}$$

mit einem auf $\sigma \in [1,2]$ beschränkten h_1. Analog sieht man, wenn ζ bei $1+2i\tau$ von μ–ter Ordnung $(\mu \in \mathbb{N}_0)$ verschwindet,

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma+2i\tau) = \frac{\mu}{\sigma-1} + h_2(\sigma-1). \tag{3.2}$$

Wegen des Pols von ζ bei $s=1$ ist

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma) = \frac{-1}{\sigma-1} + h_0(\sigma-1) \qquad (h_0 \text{ und } h_2 \text{ ähnlich wie } h_1) \tag{3.3}$$

4. 2. und 3. zusammen ergeben

$$\begin{aligned} 0 &\geq \mathrm{Re}\,\Big(\frac{-3+4m+\mu}{\sigma-1}\Big) + \text{ Beschränktes} \\ &= \frac{-3+4m+\mu}{\sigma-1} + \text{ Beschränktes.} \end{aligned}$$

Für $\sigma \to 1^+$ wird die rechte Seite wegen $m \geq 1$ beliebig groß, insbesondere positiv, was einen Widerspruch bedeutet.

Aufgaben

1. Analytische Fortsetzung der Zeta–Funktion mit Hilfe der alternierenden Zeta–Reihe.

a) Die Reihe $\sum_n (-1)^n n^{-s}$ definiert eine für $\sigma > 0$ holomorphe Funktion $A(s)$.

b) Für $\sigma > 1$ gilt

$$\zeta(s) = A(s)\,\big(2^{1-s}-1\big)^{-1}.$$

c) Durch b) erhält man die meromorphe Fortsetzung von $\zeta(s)$ in die Halbebene $\{s, \sigma > 0\}$. Aus b) kann man ablesen

c1) ζ hat bei $s = 1$ einen Pol erster Ordnung mit Residium 1.

c2) ζ hat in $\{\sigma > 0\}\backslash\{1\}$ höchstens Pole erster Ordnung an den Stellen

$$s = 1 + \frac{2\pi g i}{\ln 2} \qquad (g \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}.$$

2.

a) Die Zeta–Reihe $\sum_n n^{-s}$ konvergiert auf der Geraden $\{s = 1 + i\tau, \tau \in \mathbb{R}\}$ in keinem Punkt.

b) Die Reihe $\sum_p p^{-s}$ konvergiert für alle Punkte $s = 1 + i\tau$ mit $\tau \neq 0$. Benutzen Sie hierfür den Primzahlsatz in der Version

$$\pi(x) = \frac{x}{\ln x} + \mathrm{O}\Big(\frac{x}{\ln^2 x}\Big) \qquad (x \geq 2).$$

3.

a) Wegen $\zeta(\sigma) > 0$ für $\sigma > 1$ kann $\log \zeta(\sigma)$ reell definiert werden. Für s mit $\sigma > 1$ definiert man $\log \zeta(s)$ hiermit durch stetige Fortsetzung. Was muß dabei beachtet werden?

b) Für $\sigma > 1$ gilt

$$\sum_p p^{-s} = \log \zeta(s) + H(s).$$

Dabei ist H eine für $\sigma > \frac{1}{2}$ holomorphe Funktion. Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $C(\varepsilon)$, so daß

$$\big|H(\sigma + i\tau)\big| \leq C(\varepsilon) \quad \text{für} \quad \sigma \geq \frac{1}{2} + \varepsilon.$$

4. Beweisen Sie die Formeln

a) $\zeta^2(s)/\zeta(2s) = \sum_n 2^{\omega(n)}\, n^{-s} \quad \big(\sigma > 1, \omega(n) = \#\{p|n\}\big)$,

b) $\zeta^3(s)/\zeta(2s) = \sum_n d(n^2)\, n^{-2} \quad (\sigma > 1)$,

c) $\zeta(s-1)/\zeta(s) = \sum_n \varphi(n)\, n^{-s} \quad (\sigma > 2)$.

5.

a) Es existiert ein $\alpha_0 > 1$, so daß

$$\forall\, \sigma > \alpha_0, \tau \in \mathbb{R} : \ \big|\zeta(\sigma + i\tau)\big| < 2.$$

b) Sei $f(1) = 1$ und für $n > 1$

$$f(n) = \sum_{k \in \mathcal{N}} \#\big\{(d_1, \ldots, d_k) \in (\mathbb{N}\backslash\{1\})^k, d_1 \ldots d_k = n\big\}$$

(Anzahl der multiplikativen Zerlegungen von n in Faktoren > 1).
Zeigen Sie – zumindest formal –

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)\, n^{-s} = \big(2 - \zeta(s)\big)^{-1} \quad (\sigma > \alpha_0).$$

3. Kapitel. Der Primzahlsatz, I

Ziel dieses Abschnitts ist der Primzahlsatz in der Form

$$(PZS) \qquad \pi(x) = \frac{x}{\ln x}\,\big(1 + \mathrm{o}(1)\big)$$

Hierzu werden die Zeta–Eigenschaften aus 2. ausreichen. Will man in (PZS) eine explizite Fehler–Abschätzung, z.B. $\mathrm{O}(1/\ln x)$ statt $\mathrm{o}(1)$, dann ist mehr Information über $\zeta(s)$ erforderlich. Dies wird in den Kapiteln 4. und 5. unternommen.
Der nun folgende Beweis beruht auf einem **Tauber–Satz** (Alfred T., 1866–1942). Dazu ein paar allgemeine Bemerkungen. Aus der Analysis ist der **Satz von Abel** bekannt:
Die Reihe $\sum\limits_{n\in\mathcal{N}_0} a_n \quad (a_n \in \mathbb{C})$ sei konvergent zum Wert S. Dann ist die Funktion

$F(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} A_n\, z^n \quad \big(|z| < 1\big)$ stetig in den Punkt $z = 1$ fortsetzbar mit $\lim\limits_{z\to 1^-} F(z) = S$.

Aus Eigenschaften der Koeffizienten – hier einer Potenzreihe – kann auf Eigenschaften der erzeugenden Funktion geschlossen werden.

Die Umkehrung (Stetigkeit von F bei 1 bewirkt Konvergenz von $\sum a_n$) ist nicht ohne weiteres möglich. Dies sieht man am Beispiel

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n\, z^n = \frac{1}{1+z}, \quad \lim_{z\to 1^-} F(z) = \frac{1}{2},$$

aber $\sum(-1)^n$ ist divergent. In Tauber–Sätzen wird, unter Bedingungen an die erzeugende Funktion, der Schluß von F auf die Koeffizienten–Folge vollzogen.

Ein oft benutzter, aber nicht leicht zu beweisender Tauber–Satz für Dirichlet–Reihen ist der **Satz von Landau, Wiener, Ikehara** (Norbert W., 1894–1964; Shikao I., geb. 1904)
Die Dirichlet–Reihe $F(s) = \sum\limits_n a_n\, n^{-s}$ habe nichtnegative Koeffizienten und sei konvergent für $\sigma > 1$. Es gebe ein positives A, so daß $F(s) - \frac{A}{s-1}$ in ein Gebiet analytisch fortsetzbar ist, das die abgeschlossene Halbebene $\{s, \sigma \geq 1\}$ umfaßt. Dann gilt

$$\sum_{n\leq x} a_n = \big(A + \mathrm{o}(1)\big)x.$$

Der Satz ist unmittelbar auf $F(s) = \sum \Lambda(n)\, n^{-s} = -\zeta'/\zeta(s)$ anwendbar. Der Pol von ζ bei 1 bewirkt den Pol–Anteil $1/s - 1$ von $-\zeta'/\zeta$. Das Nicht–Verschwinden von ζ für $\sigma = 1$ sichert die geforderte Fortsetzbarkeit.

1980 fand Donald J. Newman einen Tauber–Satz, dessen Beweis relativ rasch zu führen ist, und dessen Schlußfolgerung für den Primzahlsatz gerade ausreicht. Er bezieht sich auf die **Laplace–Transformierte** einer auf $\mathbb{R}^+$ definierten Funktion und beruht auf einer scharfsinnigen Anwendung der Cauchyschen Integralformel.

3.1. Newmanscher Tauber–Satz (1980).
Sei $f : [0,\infty] \to \mathbb{C}$ beschränkt und auf jedem Intervall $[0,a]$ Riemann–integrierbar. Dann stellt

$$F(z) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-zt}\, dt \quad \text{(Laplace–Transformierte von } f\text{)}$$

eine für $\operatorname{Re} z > 0$ holomorphe Funktion dar. Es sei F analytisch fortsetzbar in ein Gebiet, das die imaginäre Achse umfaßt. Dann gilt

$$\int_0^\infty f(t)\, dt \quad \text{existiert} \quad \text{(und hat den Wert } F(0)\text{)}.$$

Beweis.
1. Für $0 < \lambda < \infty$ sei

$$F_\lambda(z) = \int_0^\lambda f(t)\ e^{-zt}\ dt$$

F_λ ist offenbar eine auf ganz $\mathbb{C}$ holomorphe Funktion. Es reicht zu zeigen, daß

$$F_\lambda(0) = \int_0^\lambda f(t)\ dt \to F(0) \quad \text{für} \quad \lambda \to \infty.$$

Oder, wenn $\varepsilon > 0$ vorgegeben ist,

$$|F_\lambda(0) - F(0)| < \varepsilon \quad \text{für} \quad \lambda \geq \lambda_0(\varepsilon). \tag{1}$$

2. Es werde $R > 0$ vorläufig beliebig gewählt, später in Abhängigkeit von ε genügend groß. Nach Voraussetzung gibt es ein $\delta = \delta(R) > 0$, so daß F holomorph ist für

$$\operatorname{Re} z \geq -\delta, \quad |\operatorname{Im} z| \leq R.$$

Sei $W = W(R)$ folgender geschlossener Weg, positiv umlaufen.

a) Der Halbkreis vom Radius R um $z_0 = 0$ in der rechten Halbebene (W^+).
b) Der Rechteckweg von iR nach $iR - \delta$, von $iR - \delta$ nach $-iR - \delta$ und von $-iR - \delta$ nach $-iR$ (W^-).

Dann bewirkt die Cauchysche Integralformel

$$F(0) - F_\lambda(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_W (F(z) - F_\lambda(z)) \cdot e^{\lambda z} \Big(\frac{1}{z} + \frac{z}{R^2} \Big) dz. \tag{2}$$

Die Verwendung dieses Integranden ist als der eigentliche Beweistrick anzusehen. Er erlaubt es, das Integral auf W gut abzuschätzen. Die Standard–Anwendung der

Cauchy'schen Formel mit dem Integranden $(F(z) - F_\lambda(z))\frac{1}{z}$ würde zu Schwierigkeiten führen.

3. Nach Voraussetzung kann

$$|f(t)| \le A \qquad \forall\, t \ge 0$$

benutzt werden. Für $x = \mathrm{Re}\ z > 0$ und $|z| = R$ ist

$$\frac{1}{z} + \frac{z}{R^2} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} + \frac{x + iy}{R^2} = \frac{2x}{R^2},$$

$$|F(z) - F_\lambda(z)| = \Big| \int_\lambda^\infty f(t)\ e^{-zt}\ dt \Big| \le A \int_\lambda^\infty e^{-xt}\ dt = \frac{A}{x}\ e^{-\lambda x}.$$

Damit läßt sich der Integrand in (2) für $\mathrm{Re}\ z > 0$ im Betrag abschätzen durch

$$\frac{A}{x}\ e^{-\lambda x}\ e^{\lambda x}\ \frac{2x}{R^2} = \frac{2A}{R^2}.$$

Dies ergibt

$$\Big| \frac{1}{2\pi i} \int_{W^+} \dots \Big| \le \frac{A}{R}. \tag{3}$$

4. Bei $-F_\lambda$ wird W^- deformiert zu dem Halbkreis vom Radius R in der linken Halbebene. Wie in 3. erhält man dort

$$|F_\lambda(z)| \le A \int_0^\lambda e^{-xt}\ dt\ < \frac{Ae^{-\lambda x}}{|x|}$$

und

$$\Big| \frac{1}{2\pi i} \int_{W^-} (-F_\lambda(z))\ e^{\lambda z} \Big(\frac{1}{z} + \frac{z}{R^2} \Big) dz \Big| < \frac{A}{R}. \tag{4}$$

5. Es bleibt der Beitrag von $F(z)$ über W^- .
Die Funktion $F(z)\big(\frac{1}{z} + \frac{z}{R^2}\big)$ ist auf dem Kompaktum $Sp(W^-)$ holomorph und somit durch $B = B(R)$ beschränkt.
Das F–Integral über die Vertikale von W^- ist daher

$$| \quad | \le \frac{1}{\pi}\ BR\ e^{-\delta\lambda}. \tag{5.1}$$

Die Integrale über die Horizontalen sind

$$| \quad | \le 2B \int_{-\lambda}^0 e^{x\lambda}\ dx < \frac{2B}{\lambda}. \tag{5.2}$$

6. Zusammenfassung liefert für beliebiges R und $\lambda > 0$

$$|F(0) - F_\lambda(0)| < \frac{2A}{R} + B(R)\ \Big(R\frac{1}{\pi}\ e^{-\delta\lambda} + \frac{2}{\lambda} \Big). \tag{6}$$

Es werde als erstes R so groß gewählt, daß $\frac{2A}{R} < \frac{\varepsilon}{2}$. Für jetzt festgehaltenes R (und damit fixe $B(R)$ und δ) gilt $\lim\limits_{\lambda\to\infty}\left(\frac{R}{\pi}\, e^{-\delta\lambda} + \frac{2}{\lambda}\right) = 0$, für $\lambda \geq \lambda_0(\varepsilon)$ ist daher der zweite Teil rechts in (6) $< \frac{\varepsilon}{2}$. Damit ist nach (1) der Beweis geführt.

Es ist nun nicht mehr weit bis zum Ziel des Kapitels

3.2. Primzahlsatz. Es gilt

$$\psi(x) = \big(1 + \mathrm{o}(1)\big) \text{ bzw.}$$
$$\pi(x) = \frac{x}{\ln x}\,\big(1 + \mathrm{o}(1)\big).$$

Beweis zur ersten Aussage. Die Äquivalenz beider Beziehungen wurde in der elementaren Zahlentheorie gezeigt.

1. Für $\sigma = \operatorname{Re} s > 1$ und $N \in \mathbb{N}$ folgt mit partieller Summation

$$\sum_{n\leq N} \Lambda(n)\; n^{-s} = \psi(N)\; N^{-s} + s \int\limits_1^N \psi(u)\; u^{-s-1}\; du.$$

Die Substitution $t = \ln u$ macht das Integral zu

$$\int\limits_0^{\ln N} \psi(e^t)\; e^{-t}\; e^{-t(s-1)}\; dt.$$

Für $N \to \infty$ geht wegen $\psi(N) = \mathrm{O}(N)$ der Term $\psi(N)\; N^{-s}$ gegen Null, $\sum\limits_{n\leq N} \Lambda(n)\; n^{-s}$ wird nach 2.4.(2) zu $-\zeta'(s)/\zeta(s)$, das Integral konvergiert, also

$$-\frac{\zeta'}{\zeta}(s) \cdot \frac{1}{s} = \int\limits_0^\infty \frac{\psi(e^t)}{e^t}\; e^{-t(s-1)}\; dt \qquad (\sigma > 1).$$

Setzt man $z = s - 1$, dann folgt hieraus

$$-\frac{1}{z+1}\;\frac{\zeta'}{\zeta}(z+1) = \int\limits_0^\infty \frac{\psi(e^t)}{e^t}\; e^{-tz}\; dt \qquad (\operatorname{Re} z > 0). \tag{1}$$

2. In ähnlicher Weise sieht man

$$\frac{1}{z+1}\;\zeta(z+1) = \int\limits_0^\infty \frac{[e^t]}{e^t}\; e^{-tz}\; dt \qquad (\operatorname{Re} z > 0).$$

3. Nach 2.2. und 2.6. ist

$$-\frac{\zeta'}{\zeta}(z+1) - \zeta(z+1) \qquad \text{holomorph für} \quad \operatorname{Re} z \geq 0.$$

Es kann somit im Hinblick auf den Tauber–Satz

$$F(z) = -\frac{\zeta'}{\zeta}(z+1) - \zeta(z+1) = \int\limits_0^\infty \Big(\frac{\psi(e^t)}{e^t} - \frac{[e^t]}{e^t}\Big)\ e^{-tz}\ dt$$

geschrieben werden. Wegen $\psi(e^t) = \mathrm{O}-(e^t)$ ist $f(t) = e^{-t}(\psi(e^t) - [e^t])$ beschränkt (und offenbar auf jedem Intervall integrierbar). Es kann der Tauber–Satz angewandt werden:

$$\int\limits_0^\infty e^{-t}(\psi(e^t) - [e^t])\ dt \quad \text{konvergiert.}$$

Ersetzt man $[e^t]$ durch $e^t - \{e^t\}$ und berücksichtigt die Konvergenz von $\int\limits_0^\infty e^{-t}\ \{e^t\}\ dt$,

dann hat man

$$\int\limits_0^\infty \big(\psi(e^t)\ e^{-t} - 1\big)\ dt \quad \text{konvergiert.} \tag{3}$$

4. Aus (3) folgt $\psi(e^t)\ e^{-t} \to 1$. Es werde z.B. angenommen, daß

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\ \psi(e^t)\ e^{-t} > 1$$

ist. Dies bedeutet, daß es eine gegen ∞ divergierende Folge (t_ν) und ein $\delta > 0$ gibt, so daß

$$\forall\ \nu : \psi(e^{t_\nu}) \geq e^{t_\nu}\ (1+\delta).$$

Mit einem (kleinen) $c > 0$ folgt daraus für jedes ν

$$\int\limits_{t_\nu}^{t_\nu+c} \big(\psi(e^t)/e^t - 1\big)dt \geq \int\limits_{t_\nu}^{t_\nu+c} \big(e^{t_\nu}(1+\delta)/e^{t_\nu+c}\big)\ dt - c = c\big((1+\delta)\ e^{-c} - 1\big).$$

Dies ist $\geq \frac{1}{2}\ c\delta$, wenn $c = c(\delta)$ genügend klein gewählt wird. Wegen der Konvergenz des Integrals müßte $\int\limits_{t_\nu}^{t_\nu+c} \ldots$ gegen Null konvergieren.

Ähnlich argumentiert man bei der Annahme $\underline{\lim}\ \psi(e^t)\ e^{-t} < 1$.

Damit ist der Primzahlsatz in der ψ–Version gezeigt.

Aufgaben

1. Sei p_n die n–te Primzahl. Leiten Sie aus dem Primzahlsatz

$$\lim_{n\to\infty}\ \frac{p_n}{n \ln n} = 1$$

her.

2*. Sei $\mathbb{P}_2$ die Menge der $n \in \mathbb{N}$, die als Produkt zweier verschiedener Primzahlen darstellbar sind. Zeigen Sie für $x \geq 4$

$$\begin{aligned}\pi_2(x) &\underset{\text{Df}}{=} \#\{n \leq x, n \in \mathbb{P}_2\} \\ &= \frac{x \ln\ln x}{\ln x} \cdot \big(1 + \mathrm{o}(1)\big) \quad (x \to \infty).\end{aligned}$$

Hinweis: Verwenden Sie zum Berechnen der Anzahl $A = \#\big\{(p_1, p_2), p_1 p_2 \leq x\big\}$ die Dirichletsche „Hyperbel–Methode“

$$A = \sum_{p_1 \leq \sqrt{x}} \sum_{p_2 \leq x/p_1} 1 + \sum_{p_2 \leq \sqrt{x}} \sum_{p_1 \leq x/p_2} 1 - \sum_{p_1 \leq \sqrt{x}} \sum_{p_2 \leq \sqrt{x}} 1.$$

3. Zeigen Sie mit Hilfe des Newmanschen Tauber–Satzes

$$M(x) \underset{\text{Df}}{=} \sum_{n \leq x} \mu(n) = \mathrm{o}(x).$$

4. Beweisen Sie mit Hilfe des Primzahlsatzes: Zu jedem $\varepsilon > 0$ existieren unendlich viele n, so daß

$$d(n) > \exp\big(\ln 2 \cdot (1 - \varepsilon) \cdot \ln n \cdot (\ln\ln n)^{-1}\big)$$

5. Sei $k(n) = kgV(1, \ldots, n)$. Dann gilt

$$k(n) = \exp\big(n(1 + \mathrm{o}(1)\big) \qquad (n \to \infty).$$

4. Kapitel. Die Riemannsche Zeta–Funktion, II.

Für den analytischen Beweis zum Primzahlsatz mit expliziter Fehler–Abschätzung ist die Nullstellenfreiheit von $\zeta(s)$ ein Stück weit links von der Vertikalen $\sigma = 1$ nötig. Hier soll das einfachste Ergebnis dieser Art hergeleitet werden. Es erfordert im Grunde nur eine sorgfältige Durchführung der de la Vallée–Poussinschen Methode aus Kapitel 2. Weitergehende Ergebnisse werden im Ausschluß daran kurz diskutiert.

Die im Folgenden benutzten $C_1, C_2, \ldots$ sind positiv und können im Prinzip alle numerisch angegeben werden.

4.1. Satz. Es existieren $C_1, C_2 > 0$, so daß für $|\tau| \geq 2$, $1 - \frac{1}{\ln|\tau|} \leq \sigma \leq 2$ gilt

(1) $\big|\zeta(\sigma + i\tau)\big| \leq C_1 \ln|\tau|$,

(2) $\big|\zeta'(\sigma + i\tau)\big| \leq C_2 \ln^2|\tau|$.

Beweis.
1. Für $\sigma > 1$ ist $\overline{\zeta(\sigma + i\tau)} = \zeta(\sigma - i\tau)$. Dies setzt sich fort in $\{s, \sigma > 0\}$. Es gilt also $\big|\zeta(\sigma + i\tau)\big| = \big|\zeta(\sigma - i\tau)\big|$, ebenso für ζ'. Es reicht daher, $\tau \geq 2$ zu betrachten.

2. In 2.2 (2) wählt man $N = [\tau]$.

$$\Big|\sum_{n\le N} n^{-s}\Big| \le \sum_{n\le N} n^{-\sigma} \le \sum_{n\le N} \frac{1}{n} \begin{cases} N^{1-\sigma}, & \text{falls } \sigma < 1, \\ 1, & \text{falls } \sigma \ge 1 \end{cases}$$

$$\le \exp\Big(\frac{\ln N}{\ln \tau}\Big) \ln(\tau+1) \le C_3 \ln \tau.$$

$$\Big| - s \int_N^\infty B_1(t)\, t^{-s-1}\, dt + (s-1)^{-1} N^{1-s} + (2N^s)^{-1}\Big|$$

$$\le (\tau+1) \int_N^\infty t^{-\sigma-1}\, d\sigma + N^{1-\sigma} + \frac{1}{2} N^{-\sigma}$$

$$\le \frac{\tau+1}{\sigma} N^{-\sigma} + N^{1-\sigma} + \frac{1}{2} N^{-\sigma} \le C_4 \ln \tau.$$

Zusammenfassung ergibt (1).

(2) erhält man durch Differenzieren von 2.2 (2) und analoges Vorgehen.

4.2. Satz. Es existieren C_5 und $C_6 > 0$, so daß für

$$\tau \ge 2 \quad \text{und} \quad \sigma \ge 1 - C_5 \ln^{-9} \tau$$

gilt

$$\big|\zeta(\sigma + i\tau)\big| \ge C_6 \ln^{-7} \tau.$$

Insbesondere ist dort $\zeta(s) \ne 0$.

Beweis. 1. Für $\gamma > 1$ und $\tau \ge 2$, $s = \gamma + i\tau$ ist nach 2.5.

$$\big|\zeta(s)\big| = \big|\prod_p (1 - p^{-s})^{-1}\big| = \big|\exp\big(\sum_p \sum_{m\ge 1} \frac{1}{m}\, p^{-ms}\big)\big|$$

$$= \exp\Big(\sum_p \sum_{m\ge 1} p^{-m\gamma} \cos(\tau \ln p)\Big).$$

Mit der bewährten Ungleichung

$$3 + 4\cos\varphi + \cos 2\varphi \ge 0$$

folgt daraus

$$\big|\zeta(\gamma)\big|^3 \, \big|\zeta(\gamma + i\tau)\big|^4 \, \big|\zeta(\gamma + 2i\tau)\big|$$

$$= \exp\Big(\sum_p \sum_{m\ge 1} \frac{1}{m}\, p^{-m\gamma} \big(3 + 4\cos(\tau \ln p) + \cos(2\tau \ln p)\big)\Big) \ge 1,$$

$$\big|\zeta(\gamma + i\tau)\big| \ge \big|\zeta(\gamma)\big|^{-3/4} \big|\zeta(\gamma + 2i\tau)\big|^{-1/4} \quad (\gamma > 1,\ \tau \ge 2). \tag{1}$$

2. Der Pol bei $s = 1$ und 4.1 (1) bewirken für $1 < \gamma \leq 2$

$$\big|\zeta(\gamma + i\tau)\big| \geq C_7(\gamma - 1)^{3/4}\,(\ln \tau)^{-1/4}. \tag{2}$$

Für $\gamma > 1$ bleibt $\big|\zeta(\gamma + i\tau)\big|$ also ein Stück von der Null weg. Da nach 4.1 (2) die Ableitung von ζ nicht zu groß wird, kann die untere Abschätzung für $|\zeta|$ ein wenig nach links, über $\sigma = 1$ hinaus, gezeigt werden.

3. Für $1 - \frac{1}{\ln \tau} \leq \sigma \leq \gamma, \quad 1 < \gamma \leq 2$ folgt mit 4.1 (2)

$$\big|\zeta(\sigma + i\tau) - \zeta(\gamma + i\tau)\big| = \Big|\int_\sigma^\gamma \zeta'(u + i\tau)\,du\Big| \leq C_2(\gamma - \sigma)\,\ln^2 \tau,$$

also mit (2)

$$\big|\zeta(\sigma + i\tau)\big| \geq \big|\zeta(\gamma + i\tau)\big| - C_2(\gamma - \sigma)\,\ln^2 \tau$$

$$\geq C_7(\gamma - 1)^{3/4}(\ln \tau)^{-1/4} - C_2(\gamma - \sigma)\,\ln^2 \tau. \tag{3}$$

4. Mit noch festzulegendem C_8 werde $\gamma = 1 + C_8 \ln^{-9} \tau$ gewählt. Die erste Bedingung an C_8 besagt, daß $1 - \frac{1}{\ln \tau} \leq q - C_8 \ln^{-9} \tau$ gelten soll.

Setzt man nun $1 - C_8 \ln^{-9} \tau \leq \sigma \leq \gamma$ voraus, dann bewirkt (3)

$$\big|\zeta(\sigma + i\tau)\big| \geq \big(C_7 C_8^{3/4} - 2C_2 C_8\big) \ln^{-7} \tau.$$

Für hinreichend kleines C_8 wird die Klammer > 0. Damit ist gezeigt

$$\big|\zeta(\sigma + i\tau)\big| \geq C_9 \ln^{-7} \tau \quad \text{für} \quad \tau \geq 2 \quad \text{und} \quad 1 - C_8 \ln^{-9} \tau \leq 1 + C_8 \ln^{-9} \tau. \tag{4}$$

5. Im Bereich $1 + C_8 \ln^{-9} \tau \leq \sigma \leq 2$ ergibt sich die Ungleichung (4) (eventuell mit einer Konstanten C_{10} statt C_9) sofort aus (2). Für $\sigma > 2$ ist

$$\big|\zeta(\sigma + i\tau)\big| = \Big|\sum_n \mu(n)\, n^{-\sigma - i\tau}\Big|^{-1} \geq \Big(\sum_n n^{-\sigma}\Big)^{-1} \geq \zeta(2)^{-1}.$$

4. und 5. zusammen ergeben die Behauptung.

Mit zusätzlichen funktionentheoretischem Aufwand läßt sich 4.2. zu

$$\zeta(\sigma + i\tau) \neq 0 \quad \text{für} \quad \tau \geq 2,\ \sigma \geq 1 - C_{10} \ln^{-1} \tau \tag{$H - VP$}$$

beweisen. Dies ist das Ergebnis von Hadamard und de la Vallée–Poussin.
Weitere Verschärfungen werden durch nichttriviale Abschätzungen für Reihen–Abschnitte $\sum\limits_{N_1 < n \leq N_2} n^{i\tau}$ erzielt. Das heute beste Ergebnis ist

$$\zeta(\sigma + i\tau) \neq 0 \quad \text{für} \quad \tau \geq 10,\ \sigma \geq 1 - C_{11}(\ln \tau)^{-2/3}(\ln \ln \tau)^{-1/3} \tag{$V - K$}$$

(Vinogradov, Korobov, 1958).

Der extrem verwickelte Beweis kann im Buch von **A. Ivić, The Riemann Zeta Function**, (Wiley, New York, 1985) nachgelesen werden.

Von einem Nullstellen–freien Parallelstreifen $\sigma \geq 1 - \delta$ ist man also noch weit entfernt.

Im folgenden werden – weitgehend ohne Beweise – die wichtigsten Ergebnisse zur Zeta–Funktion vorgestellt.

4.3. Eigenschaften der **Γ–Funktion**.
(1) Die Gamma–Funktion $\Gamma(z)$ ist für $\operatorname{Re} z > 0$ definiert durch das Eulersche Integral

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}\, e^{-t}\, dt.$$

(2) $\Gamma(z)$ ist auf ganz $\mathbb{C}$ meromorph fortsetzbar mit Polen erster Ordnung bei $z = 0, -1, -2, \ldots$. Γ genügt der Funktionalgleichung

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z).$$

Γ hat keine Nullstellen.

(3) Für $-1 < \operatorname{Re} z < 1$ gilt

$$\Gamma(-z) \sin\left(\frac{\pi}{2}\, z\right) = -\int_0^\infty t^{-1-z} \sin t\, dt.$$

(1) und (2) findet man in R. Remmert, Funktionentheorie II, Kap. 2, (3) in H. Rademacher, Topics in Analytic Number Theory, S. 82.

4.4. Funktionalgleichung der Zeta–Funktion (Riemann, 1859).
(1) $\zeta(s)$ ist – bis auf den Pol bei $s = 1$ – in ganz $\mathbb{C}$ analytisch fortsetzbar und genügt der Funktionalgleichung

$$\zeta(1-s) = 2^{1-s}\, \pi^{-s} \cos\left(\frac{1}{2}\pi s\right) \Gamma(s)\, \zeta(s).$$

(2) $\zeta(s)$ verschwindet an den Stellen $s = -2, -4, \ldots$ jeweils von erster Ordnung („**triviale Nullstellen**“). Alle übrigen Nullstellen liegen im „kritischen Streifen“ $0 < \operatorname{Re} s < 1$. Ist $\zeta(\rho) = 0$ mit $\operatorname{Re} \rho \in (0,1)$, dann verschwindet ζ auch bei $\bar{\rho}, 1-\rho, 1-\bar{\rho}$.

Hinweise zum Beweis.
1. In 2. wurde

$$\zeta(s) = -s \int_1^\infty B_1(t)\, t^{-s-1} + \frac{1}{s-1} + \frac{1}{2} \quad (\sigma > 0) \tag{1.1}$$

gezeigt. Für $0 < \sigma < 1$ rechnet man

$$\int_0^1 \big([t]-t\big)\, t^{-s-1}\, dt = \frac{1}{s-1}, \qquad \frac{s}{2}\int_1^\infty t^{-s-1}\, dt = \frac{1}{2}$$

unmittelbar nach und erhält

$$\zeta(s) = s\int_0^\infty \big([t]-t\big)\, t^{-s-1}\, dt \qquad (0<\sigma<1) \tag{1.2}$$

2. (1.1) liefert sogar die Fortsetzung bis $\sigma > -1$. Setzt man $f(t) = [t] - t + \frac{1}{2}$, $f_1(x) = \int_1^x f(t)\, dt \quad (x \geq 1)$, dann sieht man, daß f_1 beschränkt ist. Partielle Integration zeigt, daß $\int_1^\infty f(t)\, t^{-s-1}\, dt$ für $\sigma > -1$ kompakt konvergiert. Wegen

$$s\int_0^1 f(t)\, t^{-s-1} = \frac{1}{s-1} + \frac{1}{2} \qquad (\sigma<0)$$

ergibt sich

$$\zeta(s) = -s\int_0^\infty B_1(t)\, t^{-s-1}\, dt \quad \text{für} \quad -1<\sigma<0. \tag{2}$$

3. $B_1(t)$ hat die Fourier–Entwicklung

$$B_1(t) = -\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n\pi}\sin(2n\pi t).$$

Die Reihe konvergiert gegen $B_1(t)$ für $t \notin \mathbb{Z}$ und gegen Null für $t \in \mathbb{Z}$. Die Partialsummen sind gleichmäßig beschränkt. Setzt man für B_1 die Reihe in (2) ein und vertauscht Summe und Integral (dies muß mit einigem Aufwand gerechtfertigt werden!), erhält man für $-1 < \sigma < 0$

$$\begin{aligned}
\zeta(s) &= \frac{s}{\pi}\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n}\int_0^\infty \sin(2\pi n t)\, t^{-s-1}\, dt \\
&= \frac{s}{\pi}\sum_{n=1}^\infty \frac{(2n\pi)^s}{n}\int_0^\infty \sin x \cdot x^{-s-1}\, dx \\
&= -\frac{s}{\pi}\,(2\pi)^s\,\Gamma(-s)\sin\Big(\frac{1}{2}x\Big)\,\zeta(1-s) \qquad (3)
\end{aligned}$$

nach 4.3 (3), und weil für $-1 < \sigma < 0$ $\quad \mathrm{Re}\,(1-s) > 1$ ist.
Die rechte Seite von (3) ist holomorph für alle s mit $\sigma < 0$. Damit ist die Fortsetzbarkeit in die ganze Ebene gezeigt. Die Gleichung (3) gilt nicht nur im Streifen $-1 < \sigma < 0$,

sondern überall.

4. Ersetzt man in (3) s durch $1-s$, dann wird daraus mit 4.3 (2)

$$\zeta(1-s) = (s-1)\,\frac{1}{\pi}\,(2\pi)^{1-s}\,\Gamma(s-1)\sin\Big(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\,s\Big)\,\zeta(s)$$

$$= 2^{1-s}\,\pi^{-s}\cos\Big(\frac{\pi}{2}\,s\Big)\,\Gamma(s)\,\zeta(s). \tag{4}$$

5. Es besteht – außer der Spiegelsymmetrie zur reellen Achse wegen $\zeta(\bar{s}) = \overline{\zeta(s)}$ – also eine nahe Verwandtschaft der Werte $\zeta(s)$ und $\zeta(1-s)$. s und $1-s$ liegen punktsymmetrisch zu $s_0 = 1/2$.

5.1. $s=1$ in (4), der Pol von ζ und das Verschwinden des cos zeigen, daß ζ in $s=0$ regulär ist und nicht verschwindet, $\zeta(0) = -1/2$.

5.2. Nullstellen in $\sigma \le 0$ können wegen $\zeta(s) \neq 0$ für $\sigma \ge 1$ und $\Gamma(s) \neq 0$ nur durch cos–Nullstellen in (4) entstehen.

$$\cos\frac{\pi}{s}\,s = 0 \quad \text{genau für} \quad s = 2g+1 \quad (g \in \mathbb{Z}).$$

Ist $z = 1-s$ mit Re $s > 1$, dann wird die rechte Seite in (4) zu Null genau für $z = -2, -4, \ldots$, da $\Gamma(s)$ dort holomorph (und $\neq 0$) ist.

6. Nach den zwei Symmetrie–Beziehungen liefert eine Nullstelle ρ mit $1/2 <$ Re $\rho < 1$ und Im $\rho > 0$ die drei Partner $\bar{\rho}, 1-\rho$ und $1-\bar{\rho}$. Bei Re $\rho = 1/2$ ist es nur ein Partner $\bar{\rho}$. Es ist nicht schwer zu sehen, daß $\zeta(\sigma) < 0$ für $-2 < \sigma < 1$.

4.5. Satz. Für $T \ge 2$ bezeichne $N(T)$ die Anzahl der nichttrivialen Nullstellen $\rho = \xi + i\eta$ der Zeta–Funktion mit $0 < \eta \le T$. Mehrfache Nullstellen werden gemäß ihrer Vielfachheit gezählt. Dann gilt

$$N(T+1) - N(T) = \mathrm{O}(\ln T). \tag{1}$$

Insbesondere hat ein $\rho = \xi + i\eta$ mit $\eta \ge 2$ die Vielfachheit $\mathrm{O}(\ln \eta)$.

$$N(T) = \frac{T}{2\pi}\,\ln\frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} + \mathrm{O}(\ln T). \tag{2}$$

Hinweis. $2N(T)$ wird nach dem Argument–Prinzip berechnet durch das Integral $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_W \zeta'/\zeta(s)\,ds$, wobei W der rechtwinklige Weg mit den Ecken $2+iT$, $-1+iT$, $-1-iT$, $2-iT$ ist. Eventuelle Nullstellen auf dem Weg oder sehr nahebei müssen durch kleine Halbkreise umgangen werden. Der Teil des Wegs mit Re $s \le 1/2$ kann nach der Funktionalgleichung umgeklappt werden in einen Wege mit Re $s \ge 1/2$. Da die Faktoren an $\zeta(s)$ in der Funktionalgleichung gut bekannt sind, kann das Integral ausgewertet werden.

Die Formel (2) wurde schon von Riemann vermutet und 1895 (in etwas abgeschwächter Form) durch H. von Mangoldt bewiesen.

4.6. Satz. Partialbruchentwicklung von ζ'/ζ.
Für $-1 \le \sigma \le 2$ und $|\tau| \ge 2$ gilt

$$\zeta'(s)/\zeta(s) = \sum_\rho{}' \frac{1}{s-\rho} + \mathrm{O}(\ln|\tau|).$$

Dabei bedeutet $\sum_\rho{}'$ Summation über die nichttrivialen Zeta–Nullstellen $\xi + i\eta$ mit $|\tau - \eta| < 1$.

Die erste nichttriviale Nullstelle $\rho = \xi + i\eta$ hat den Wert $1/2 + i \cdot 14,134\ldots$. Die ersten 15 Nullstellen wurden 1903 von **Jörgen Gram** (1850–1916) berechnet. Heute kennt man mehr als 10^9 Nullstellen. Sie sind alle einfach und haben den Realteil $1/2$. Dies unterstützt die berühmte

4.7. Riemannsche Vermutung.

$$\zeta(s) \neq 0 \quad \text{für} \quad \mathrm{Re}\, s > 1/2.$$

Nachdem das Fermatsche Problem 1995 durch Andrew Wiles gelöst wurde, ist dies vielleicht zur Zeit die größte Herausforderung an die Mathematiker.

Aufgaben
1. Zeigen Sie $\zeta(\sigma) < 0$ für $0 < \sigma < 1$.

2. Beweis zu $\zeta(1+it) \neq 0$ nach A.E. Ingham (1930). Sei $\zeta(1+it_0) = 0$ für $t_0 \neq 0$ und

$$A(s) = \frac{\zeta^2(s)\zeta(s+it_0)\zeta(s-it_0)}{\zeta(2s)} \qquad (\sigma > 1).$$

a) ζ hat bei $1 - it_0$ eine Nullstelle derselben Ordnung wie bei $1 + it_0$.
b*) Für $\sigma > 1$ gilt $A(s) = \sum_n a_n\, n^{-s}$ mit $a_n = \big|\sum_{d|n} d^{it_0}\big|^2$. Falls es für allgemeine n zu mühsam ist, zeigen Sie es zumindest für $n = p$.
c) Sei $\sigma_0 \le 1$ die Konvergenzabszisse der Reihe b). Dann hat A bei $s = \sigma_0$ eine Singularität.
d) $\sigma_0 < 1/2$.
e) $A(1/2) \ge 1$.
f) $A(1/2) = 0$. Widerspruch!

5. Kapitel. Der Primzahlsatz, II

Ähnlich wie bei Potenzreihen der k–te Koeffizient durch ein Cauchy–Integral berechnet

werden kann, ist es bei Dirichlet–Reihen $\sum_n a_n\, n^{-s}$ möglich, endliche Koeffizienten–Summen $\sum_{n\le x} a_n$ durch Integration zu berechnen. Die technischen Einzelheiten sind hier etwas verwickelter.

5.1. Dirichletscher diskontinuierlicher Faktor.

Sei $\alpha, y, T > 0$, $I(y,T) = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{\alpha-iT}^{\alpha+iT} y^s\, \frac{ds}{s}$ und

$$\delta(y) = 0, \quad \text{falls} \quad 0 < y < 1; \quad \frac{1}{2} \quad \text{für} \quad y = 1 \quad \text{und} \quad 1 \quad \text{falls} \quad y > 1.$$

Dann gilt

$$\big|I(y,T) - \delta(y)\big| < \begin{cases} y^\alpha \min(1, 2\,T^{-1}|\ln y|^{-1}) & \text{für} \quad y \neq 1, \\ \alpha\, T^{-1} & \text{für} \quad y = 1. \end{cases}$$

Beweis. 1. $y = 1$. Man sieht unmittelbar

$$I(1,T) = \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \frac{dt}{\alpha + it} = \frac{1}{\pi} \int_0^T \frac{\alpha}{\alpha^2 + t^2}\, dt$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \int_{T/\alpha}^{\infty} \frac{du}{1+u^2}.$$

Triviale Abschätzung des letzten Integrals $(1 + u^2 > u^2)$ ergibt die Behauptung.

2. $y > 1$. Sei $R = (\alpha^2 + T^2)^{1/2}$. Bezeichne W den geschlossenen Weg, bestehend aus der Strecke S von $\alpha - iT$ nach $\alpha + iT$, und dem Kreisbogen K, mit Mittelpunkt $s = 0$ und Radius R, von $\alpha + iT$ nach links um den Nullpunkt bis $\alpha - iT$. Der Integrand y^s/s hat bei $s = 0$ einen Pol erster Ordnung mit Residuum 1. Der Residuensatz liefert daher

$$I(y,T) = 1 - \frac{1}{2\pi i} \int_K y^s\, \frac{ds}{s}.$$

Das K–Integral ist

$$= \frac{y^s}{s \ln y}\Big|_{\alpha-iT}^{\alpha+iT} + \frac{1}{\ln y} \int_K \frac{y^s}{s^2}\, ds.$$

Wegen $y > 1$ gilt auf K $|y^s| \le y^\alpha$ (hier liegt der Grund dafür, daß für $y > 1$ der Kreisbogen links von der Geraden $\sigma = \alpha$ gewählt wird, während man für $0 < y < 1$ den Kreisbogen nach rechts legt). Es ergibt sich mit der Standard–Abschätzung für das Integral

$$\big|I(y,T) - 1\big| \le \frac{1}{2\pi}\Big(2\,\frac{y^\alpha}{R \ln y} + \frac{1}{\ln y}\,\frac{y^\alpha}{R^2}\,2\pi R\Big) < 2\,\frac{y^\alpha}{T \ln y}.$$

Dies entspricht der zweiten Alternative in der Behauptung. Die Ungleichung wird für y nahe bei 1 sehr schwach.

Direkte Abschätzung des Integrals über K ergibt die Schranke $\frac{1}{2\pi}\, y^\alpha\, \frac{1}{R}\, 2\pi R = y^\alpha$. Dies ist die erste Alternative.

3. $0 < y < 1$. Hier legt man den Kreisbogen nach rechts. Dementsprechend fehlt der Residuen–Beitrag.

5.2. Perronsche Formel (Oskar P., 1880–1975).
Die Reihe $A(s) = \sum\limits_n a_n\, n^{-s}$ sei absolut konvergent für $\sigma > 1$. Es werde vorausgesetzt

$$\sum_n |a_n|\, n^{-\sigma} = \mathrm{O}\big((\sigma-1)^{-\beta}\big) \quad \text{für} \quad \sigma > 1 \quad \text{mit einem} \quad \beta \geq 0, \tag{3}$$

$$|a_n| \leq \Phi(n) \quad \text{mit einem mononton wachsenden} \quad \Phi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+, \tag{4}$$

$$x \geq 2, \quad 2 \leq T \leq x, \quad 1 < \alpha \leq 2. \tag{5}$$

Dann gilt

$$\sum_{n\leq x} a_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\alpha-iT}^{\alpha+iT} A(s)\, \frac{x^s}{s}\, ds + \mathrm{O}\Big(\frac{x^\alpha}{T}(\alpha-1)^{-\beta} + \frac{x}{T}\,\Phi(2x)\ln x\Big).$$

Die O–Konstante kann explizit in Abhängigkeit von der O–Konstanten in (1) angegeben werden.

Bemerkungen. 1. Das Prinzip, $\sum\limits_{n\leq x} a_n$ durch das Integral $\frac{1}{2\pi i}\int A(s)\,\frac{x^s}{s}\,ds$ zu berechnen, tritt schon bei Riemann und zahlreichen Autoren des neunzehnten Jahrhunderts auf. Eine korrekte Ausführung mit genauer Fehler–Betrachtung gab 1908 Oskar Perron.

2. Die relativ komplizierte Formulierung rührt unter anderem daher, daß das Integral für $T \to \infty$ i.a. nicht absolut konvergiert. Dieser Mangel fehlt bei der ähnlich, aber einfacher zu beweisenden „**bewichteten Perron–Formel**“

$$\sum_{n\leq x} a_n\Big(1-\frac{n}{x}\Big) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} A(s)\, \frac{x^s}{s(s+1)}\, ds.$$

Hier muß $\sum a_n\Big(1-\frac{n}{x}\Big)$ auf $\sum a_n$ zurückgeschlossen werden.

Beweis. 1. Wegen der absoluten Konvergenz der Reihe auf der α–Vertikalen können im $\int A(s)\, x^s\, s^{-1}\, ds$ Summation und Integration vertauscht werden. Bei jedem Summanden wird 5.1. mit $y = x/n$ angewandt. Für $n \leq x-1$ bzw. $n > x+1$ wird im min in 5.1.

die zweite Alternative genommen. Für $x-1<n\le x+1$ die erste. Man erhält so

$$\begin{aligned}J &\underset{\text{Df}}{=} \frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-iT}^{\alpha+iT} A(s)\,\frac{x^s}{s}\,ds\\ &= \sum_{n\le x-1} a_n\Big(1+\mathrm{O}\Big(\Big(\frac{x}{n}\Big)^{\alpha} T^{-1}\Big(\ln\frac{x}{n}\Big)^{-1}\Big)\Big)+\mathrm{O}\Big(\sum_{x-1<n\le x+1}|a_n|\,\Big(\frac{x}{n}\Big)^{\alpha}\Big)\\ &\qquad +\sum_{n>x+1} a_n\mathrm{O}\Big(\Big(\frac{x}{n}\Big)^{\alpha} T^{-1}\Big(\ln\,\frac{n}{x}\Big)^{-1}\Big).\end{aligned}$$

Für $n\le\dfrac{x}{2}$ ist $\ln\dfrac{x}{n}\ge\ln 2$, bzw. $\ln\dfrac{n}{x}\ge\ln 2$ für $n\ge 2x$. Es ergibt sich

$$\begin{aligned}J &= \sum_{n\le x} a_n+\mathrm{O}\Big(\sum_{x-1<n\le x+1}|a_n|\Big)+\mathrm{O}\Big(x^{\alpha}\,T^{-1}\sum_{n\le x/2}|a_n|\,n^{-\alpha}\Big)\\ &+\mathrm{O}\Big(T^{-1}\sum_{x/2<n\le x-1}|a_n|\Big(\frac{x}{n}\Big)^{\alpha}\,\Big(\ln\frac{x}{n}\Big)^{-1}\Big)+\mathrm{O}\Big(T^{-1}\sum_{x+1<n\le 2x}|a_n|\,\Big(\frac{x}{n}\Big)^{\alpha}\Big(\ln\,\frac{n}{x}\Big)^{-1}\Big)\\ &+\mathrm{O}\Big(x^{\alpha}\,T^{-1}\sum_{n>2x}|a_n|\,n^{-\alpha}\Big)\\ &=\sum_{n\le x} a_n+E_1+\cdots+E_5,\quad\text{bzw.}\end{aligned}$$

2. Nach (2) ist

$$E_1=\mathrm{O}\big(\Phi(2x)\big)=\mathrm{O}\Big(\frac{x}{T}\,\Phi(2x)\ln x\Big).$$

3. E_2+E_5 kann nach (1) abgeschätzt werden durch

$$\mathrm{O}\Big(x^{\alpha}\,T^{-1}\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|\,n^{-\alpha}\Big)=\mathrm{O}\big(x^{\alpha}\,T^{-1}(\alpha-1)^{-\beta}\big).$$

4. Für $x/2<n\le x-1$ ist

$$\ln\frac{x}{n}=-\ln\frac{n}{x}=-\ln\Big(1-\frac{x-n}{x}\Big),\quad \gamma\underset{\text{Df}}{=}\frac{x-n}{x}\in(0,1/2].$$

Mit

$$-\ln(1-\gamma)=\ln 1-\ln(1-\gamma)=\int_{1-\gamma}^{1} t^{-1}\,dt\ge\int_{1-\gamma}^{1} dt=\gamma$$

ergibt sich wegen $\alpha \le 2$

$$\begin{aligned} E_3 &= \mathrm{O}\Big(T^{-1} \sum_{x/2<n\le x-1} |a_n|\, 2^\alpha \, \frac{x}{x-n}\Big) \\ &= \mathrm{O}\Big(T^{-1}\, x\, \Phi(2x) \sum_{x/2<n\le x-1} \frac{1}{x-n}\Big) = \mathrm{O}\Big(T^{-1}\, x\, \Phi(2x) \sum_{1\le k\le x} \frac{1}{k}\Big) \\ &= \mathrm{O}\big(T^{-1} x\, \Phi(2x) \ln x\big). \end{aligned}$$

Analog kann E_4 behandelt werden.

5. Die Fehler–Abschätzungen bewegen sich alle im Rahmen der Behauptung. Damit ist die Perronsche Formel gezeigt.

Gauss äußerte 1849 die Vermutung, daß $\pi(x)$ durch die Funktion

$$\mathrm{Li}\, x = \int_2^x \frac{dt}{\ln t} \qquad (x \ge 2)$$

(**Integral–Logarithmus**) gut approximiert wird. Er stützte sich dabei auf die Primzahlen bis $3 \cdot 10^6$.

Durch partielle Integration sieht man

$$\begin{aligned} \mathrm{Li}\, x &= \int_2^x \frac{d}{dt}(t)\, \frac{1}{\ln t}\, dt = \frac{t}{\ln t}\Big|_2^x + \int_2^x \frac{dt}{\ln^2 t} \\ &= \Big(\frac{t}{\ln t} + \frac{t}{\ln^2 t} + \frac{2!\, t}{\ln^3 t} + \cdots + \frac{(N-1)!\, t}{\ln^N t}\Big)\Big|_2^x + N! \int_2^x \frac{dt}{\ln^N t} \\ &= \frac{x}{\ln x} + \frac{1!\, x}{\ln^2 x} + \cdots + \frac{(N-1)!\, x}{\ln^N x} + \mathrm{O}\Big(\frac{x}{\ln^{N+1} x}\Big) \end{aligned}$$

für jedes $N \in \mathbb{N}$ mit von N abhängiger O–Konstanten.

Die Gauss'sche Annahme hat sich bestätigt.

5.3. Primzahlsatz mit Restglied.

Es existieren Konstanten $C_1, C_2 > 0$, so daß für $x \ge 2$ gilt

$$\psi(x) = x + \mathrm{O}\big(x \exp(-C_1(\ln x)^{1/10})\big), \tag{1}$$

$$\pi(x) = \mathrm{Li}x + \mathrm{O}\big(x \exp(-C_2(\ln x)^{1/10})\big). \tag{2}$$

Bem. Die angegebene Fehler–Abschätzung ist besser als $\mathrm{O}\big(x(\ln x)^{-A}\big)$ für jedes $A > 0$, aber schwächer als $\mathrm{O}(x^{1-\varepsilon})$ für jedes $\varepsilon > 0$. Denn

$$\frac{x(\ln x)^{-A}}{x\exp(-C_1(\ln x)^{1/10})} = \exp\big(-C_1(\ln x)^{1/10} + A\ln\ln x\big).$$

Dies geht gegen Null für $x \to \infty$. Analog mit $\mathrm{O}(x^{1-\varepsilon})$.

Insbesondere steht damit der Primzahlsatz in der Gestalt

$$\pi(x) = \frac{x}{\ln x} + \frac{1!x}{\ln^2 x} + \cdots + \frac{(N-1)!\,x}{\ln^N x} + \mathrm{O}\Big(\frac{x}{\ln^{N+1} x}\Big)$$

für jedes $N \in \mathbb{N}$ zur Verfügung.

Beweis zu (1).
1. Es reicht, x als hinreichend groß vorauszusetzten. Für $2 \le x \le x_0$ sind (1) und (2) mit geeigneten O–Konstanten sicher erfüllt. $C_3, C_4, \ldots$ sind wieder positive, im Prinzip numerisch angebbare Konstanten.

2. 5.2. wird angewandt auf $a_n = \Lambda(n)$, $A(s) = -\zeta'/\zeta(s)$. Da $-\zeta'/\zeta$ bei $s = 1$ einen Pol erster Ordnung hat, kann $\beta = 1$ gewählt werden. $\Phi(n) = \ln n$. T mit $2 \le T \le x$ wird am Ende günstig gewählt. α darf wegen des Wachstums von x^α nicht zu groß, aber wegen des Faktors $(\alpha-1)^{-1}$ nicht zu nahe bei 1 genommen werden. Eine gute Wahl ist

$$\alpha = 1 + \frac{1}{\ln x}.$$
$$x^\alpha = e\,x = \mathrm{O}(x), \quad (\alpha-1)^{-1} = \ln x.$$

Die Perronsche Formel liefert daher

$$\psi(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-iT}^{\alpha+iT}\Big(-\frac{\zeta'}{\zeta}(s)\Big)\,\frac{x^s}{s}\,ds + \mathrm{O}\Big(\frac{x}{T}\,\ln^2 x\Big). \tag{2}$$

3. Es werde vorerst angenommen, daß so wie x auch T numerisch groß ist (die spätere Wahl des T wird dies bestätigen.) Nach Satz 4.2. existiert ein C_3, so daß $\zeta(\sigma+i\tau) \neq 0$ (und der dortigen Abschätzung genügt) für

$$2 \le \tau \le T, \quad \sigma \ge \sigma_1 \underset{\mathrm{Df}}{=} 1 - C_3\ln^{-9} T. \tag{3.1}$$

Im Bereich $2 \le \tau \le T, \quad \sigma_1 \le \sigma \le 2$ gilt nach 4.1(2) und 4.2 somit

$$\big|\zeta'/\zeta(\sigma+i\tau)\big| \le C_4\ln^9 T. \tag{3.2}$$

Da $\zeta(1+i\tau) \neq 0$ für $|\tau| \le 2$, gibt es ein $C_5 > 0$, so daß $\zeta(\sigma+i\tau) \neq 0$ für $\sigma \ge 1 - C_5$, $|\tau| \le 2$.
Durch eventuelles Verkleinern des C_3 kann man erreichen, daß

$$\zeta(\sigma+i\tau) \neq 0 \quad \text{für} \quad \sigma \ge \sigma_2 \underset{\mathrm{Df}}{=} 1 - C_6\ln^{-9} T, \quad |\tau| \le T \tag{3.3}$$

und

$$\left|\zeta'/\zeta(s)\right| \le C_7 \ln^9 T \tag{3.4}$$

für a) $s = \sigma_2 + i\tau, \quad |\tau| \le T$
b) $s = \sigma \pm iT, \quad \sigma_2 \le \sigma \le \alpha.$

Für $|\tau| \ge 2$ folgt dies aus (3.2), für $|\tau| \le 2$ verhält sich $-\zeta'/\zeta$ nahe $s = 1$ wie $\dfrac{1}{s-1}$ + Beschränktes.

4. Sei W der Weg, bestehend aus

$$\begin{aligned} H_1, &\quad \text{der Strecke von} \quad \alpha - iT \quad \text{nach} \quad \sigma_2 - iT, \\ V, &\quad \text{der Strecke von} \quad \sigma_2 - iT \quad \text{nach} \quad \sigma_2 + iT, \\ H_2, &\quad \text{der Strecke von} \quad \sigma_2 + iT \quad \text{nach} \quad \alpha + iT. \end{aligned}$$

Das Integral in (2) wird nach dem Residuensatz ersetzt durch das über W. Nach 3. ist die einzige überschrittene isolierte Singularität der Pol bei 1. Wegen

$$\mathrm{Res}\Big(1, -\frac{\zeta'}{\zeta}(s)\frac{x^s}{s}\Big) = x$$

folgt daher mit (2)

$$\psi(x) = x + \frac{1}{2\pi i}\Big(\int\limits_{H_1} + \int\limits_{H_2} + \int\limits_{V}\Big)\Big(-\frac{\zeta'}{\zeta}(s)\Big)\,\frac{x^s}{s}\,ds + \mathrm{O}\Big(\frac{x}{T}\ln^2 x\Big). \tag{4}$$

5. Auf H_1 und H_2 reicht die Standard–Abschätzung mit (3.4)

$$\int\limits_{H_1} + \int\limits_{H_2} = \mathrm{O}\Big(\ln^9 T \cdot \frac{x^\alpha}{T}\Big) = \mathrm{O}\Big(\frac{x}{T}\,\ln^9 x\Big).$$

6. Analog sieht man

$$\int\limits_{V} = \mathrm{O}\Big(\ln^9 T \cdot x^{\sigma_2} \int\limits_{V} |s|^{-1}\,|ds|\Big).$$

Auf dem Teil von V mit $|\tau| \le 1$ ist $s^{-1} = \mathrm{O}(\ln^9 T)$, das Integral hierüber also $\mathrm{O}(\ln^9 T)$. Der restliche Teil läßt sich durch $\mathrm{O}\Big(\int\limits_1^T T^{-1}\,dt\Big) = \mathrm{O}(\ln T)$ abschätzen.

7. (4), 5. und 6. zusammen ergeben

$$\begin{aligned} \psi(x) &= x + \mathrm{O}\Big(\frac{x}{T}\,\ln^2 x\Big) + \mathrm{O}\Big(\frac{x}{T}\,\ln^9 x\Big) + \mathrm{O}\big(x^{\sigma_2}\,\ln^{18} x\big) \\ &= x + \mathrm{O}\Big(\ln^{18} x\Big(\frac{x}{T} + x^{\sigma_2}\Big)\Big). \end{aligned} \tag{7.1}$$

Man wählt nun T so, daß $xT^{-1} = x^{\sigma_2}$ wird, das heißt

$$x\exp(-\ln T) = x\exp\big(-C_6\ln x\cdot\ln^{-9}T\big),$$
$$\ln T = C_6^{1/10}\ln^{1/10}x, \quad T = \exp\big(C_6^{1/10}\ln^{1/10}x\big).$$

Für hinreichend großes x ist wie gefordert $2 \le T \le x$ und $T = T(x) \to \infty$ mit $x \to \infty$. In (7.1) eingesetzt, bewirkt das

$$\begin{aligned}\psi(x) &= x + \mathrm{O}\big(x\exp(-C_6^{1/10}\ln^{1/10}x + 18\ln\ln x)\big)\\ &= x + \mathrm{O}\big(x\exp(-C_1\ln^{1/10}x)\big)\end{aligned}$$

mit $C_1 = \dfrac{1}{2}\,C_6^{1/10}$. Damit ist Aussage (1) des Satzes gezeigt.

Beweis zu (2).
1. Es ist

$$\begin{aligned}\sum_{p^k\le x,k\ge 2}\ln p &= \sum_{p\le x^{1/2}}\ln p\sum_{2\le k\le \ln x/\ln p}1\\ &\le \ln x\cdot\pi(x^{1/2}) = \mathrm{O}(x^{1/2})\end{aligned}$$

nach Tschebytschev.
Also folgt

$$\begin{aligned}\vartheta(x) = \sum_{p\le x}\ln p &= \psi(x) - \sum_{p^k\le x,k\ge 2}\ln p\\ &= x + \mathrm{O}\big(x\exp(-C_1\ln^{1/10}x)\big) + \mathrm{O}(x^{1/2})\\ &= x + \mathrm{O}\big(x\exp(-C_1\ln^{1/10}x)\big).\end{aligned}$$

2. Der Übergang von ϑ zu π erfolgt durch partielle Summation

$$\begin{aligned}\pi(x) = \sum_{p\le x}\ln p\cdot\frac{1}{\ln p} &= \vartheta(x)\,\frac{1}{\ln x} + \int_2^x \vartheta(t)\,\frac{dt}{t\ln^2 t}\\ &= \frac{t}{\ln t}\,\Big|_2^x - \int_2^x t\,\frac{d}{dt}\Big(\frac{1}{\ln t}\Big)\,dt\\ &\quad + \mathrm{O}\big(x\exp(-C_1\ln^{1/10}x)\big) + \int_2^x R(t)\,\frac{dt}{t\ln t},\end{aligned}$$

wobei sich $R(t)$ durch $\mathrm{O}\big(t\exp(-C_1\ln^{1/10}t)\big)$ abschätzen läßt.

3. Das letzte Integral in 2. ist

$$\begin{aligned}
&= \mathrm{O}\Big(\int_2^{x^{1/2}} t\,\frac{dt}{t\ln t}\Big) + \mathrm{O}\Big(\int_{x^{1/2}}^{x} t\exp\big(-C_1\,2^{-1/10}(\ln x)^{1/10}\big)\,\frac{dt}{t}\Big)\\
&= \mathrm{O}(x^{1/2}) + \mathrm{O}\big(x\exp(-C_1\,2^{-1/10}(\ln x)^{1/10})\big)\\
&= \mathrm{O}\big(x\exp(-C_2(\ln x)^{1/10})\big).
\end{aligned}$$

mit $C_2 = C_1\,2^{-1/10}$.

4. In 2. eingesetzt, ergibt dies mit partieller Integration

$$\pi(x) = \int_2^x \frac{dt}{\ln t} + \mathrm{O}\big(x\exp(-C_2(\ln x)^{1/10})\big).$$

wie behauptet.

Zusatz. Falls für ein $a > 0$ bekannt ist, daß

$$\zeta(\sigma+i\tau) \neq 0 \quad \text{für} \quad |\tau| \geq 2 \quad \text{und} \quad \sigma \geq 1 - C_7(\ln|\tau|)^{-a}$$

sowie dort

$$\zeta'/\zeta(\sigma+i\tau) = \mathrm{O}\big((\ln|\tau|)\big)^{C_8},$$

erfüllt ist, dann läßt sich nach der gleichen Methode

$$\psi(x) = x + \mathrm{O}\big(x\exp(-C_9(\ln x)^{1/(1+a)})\big)$$

zeigen.

Man kommt auf diesen Fehler wieder durch die Wahl des T, ähnlich wie im vorigen Beweis.

Der Wert $a = 1$ von Hadamard–de la Vallée–Poussin führt zu

(PZS - HV) $$\psi(x) = x + \mathrm{O}\big(x\exp(-C_{10}(\ln x)^{1/2})\big).$$

Das Vinogradov–Korobovsche Nullstellen–freie Gebiet ergibt

(PZS - VK) $$\psi(x) = x + \mathrm{O}\big(x\exp(-C_{11}\ln^{3/5} x\cdot(\ln\ln x)^{-1/5})\big).$$

Diese Abschätzung wartet seit mehr als vierzig Jahren auf Verbesserung.

Der fundamentale Zusammenhang zwischen den Primzahlen und den Nullstellen der Zeta–Funktion wird besonders deutlich durch sogenannte **explizite Formeln**, in denen Primzahlsummen $\sum_p f(p)$ bzw. $\sum_n \Lambda(n)\,f(n)$ mit Nullstellensummen $\sum_\rho \tilde{f}(\rho)$ in Beziehung gebracht werden. Hier das Standard–Beispiel.

5.4. Explizite Formel für $\psi(x)$.
Für $2 \le T \le x$ gilt

$$\psi(x) = x - \sum_{\rho, |\mathrm{Im}\rho| \le T} \frac{x^\rho}{\rho} + \mathrm{O}\Big(\frac{x}{T} \ln^2 x\Big).$$

Die ρ–Summe erstreckt sich über nichttriviale Zeta–Nullstellen. Jedes ρ wird gemäß seiner Vielfachheit gezählt.

Beweis. 1. Es reicht, die Formel für ein T' mit $|T' - T| \le 1$ zu zeigen. Am Fehlerterm ändert sich nichts wesentliches. Nach 4.5 (1) ändert sich die ρ–Summe um $\mathrm{O}(\ln T)$ Terme. Deren Beitrag ist

$$\mathrm{O}\Big(\frac{x}{T} \ln T\Big) = \mathrm{O}\Big(\frac{x}{T} \ln^2 x\Big).$$

2. Nach 4.5 (1) existieren ein T' mit $T \le T' \le T + 1$ und ein C_{12}, so daß für alle ρ

$$\big||\mathrm{Im}\,\rho| - T'\big| \ge C_{12}(\ln T)^{-1} \tag{2.1}$$

gilt.
Es wird wieder die Perronsche Formel 5.2. auf $a_n = \Lambda(n)$ mit $\alpha = 1 + (\ln x)^{-1}$ angewandt.

$$\psi(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha - iT'}^{\alpha + iT'} \Big(-\frac{\zeta'}{\zeta}(s)\Big)\frac{x^s}{s}\, ds + \mathrm{O}\Big(\frac{x}{T} \ln^2 x\Big). \tag{2.2}$$

3. Diesmal sei W der Weg, bestehend aus

H_1,	der Horizontalen von	$\alpha - iT'$	nach	$-1 - iT'$
V,	der Vertikalen von	$-1 - iT'$	nach	$-1 + iT'$,
H_2,	der Horizontalen von	$-1 + iT'$	nach	$\alpha + iT'$.

Die Wahl des T' bewirkt, daß alle Punkte von W um $\ge C_{12}(\ln T)^{-1}$ von allen ρ (und auch von den trivialen Nullstellen) entfernt sind.

4. Auf das Integral in (2.2) wird der Residuensatz angewandt. Im Innern des Rechtecks, gebildet aus der α–Vertikalen und W, liegen der Pol bei 1 mit Residuum x und die ρ mit $|\mathrm{Im}\,\rho| < T'$. $-\zeta'/\zeta$ hat bei einem ρ mit der Vielfachheit m einen Pol erster Ordnung mit Residuum $-m$. Folglich ist

$$\mathrm{Re}\, s\Big(\rho, -\frac{\zeta'}{\zeta}(s)\frac{x^s}{s}\Big) = -m\,\frac{x^\rho}{\rho}.$$

Oder, wenn ein ρ der Vielfachheit m als m–Tupel einfacher Nullstellen angesehen wird, $\operatorname{Re} s(\rho,\dots) = -\dfrac{x^\rho}{\rho}$. Aus (2.2) wird daher

$$\psi(x) = x - \sum_{\rho,|\operatorname{Im}\rho|\le T'} \frac{x^\rho}{\rho} + \mathrm{O}\Big(\frac{x}{T}\ln^2 x\Big) + \frac{1}{2\pi i}\Big(\int_{H_1} + \int_V + \int_{H_2}\Big)\Big(-\frac{\zeta'}{\zeta}(s)\frac{x^s}{s}\,ds\Big) \tag{4}$$

5. Zur Abschätzung von ζ'/ζ auf H_1, V und H_2 benutzt man Satz 4.6. Nach der Wahl des T' ist für $s \in H_1$ und ρ mit $|\operatorname{Im} s - \operatorname{Im}\rho| \le 1$, $\big|\frac{1}{s-\rho}\big| \le C_{13}\ln T$. Nach 4.5 (1) müssen nur $\mathrm{O}(\ln T)$ Nullstellen berücksichtigt werden, also

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(s) = \mathrm{O}(\ln^2 T) = \mathrm{O}(\ln^2 x).$$

Ebenso für V und H_2. Der Beitrag der Integrale in (4) ist damit leicht abzuschätzen.

$$\int_{H_1} + \int_{H_2} = \mathrm{O}\Big(\ln^2 x \cdot \frac{x}{T}\Big),$$

$$\int_V = \mathrm{O}\Big(\ln^2 x \cdot x^{-1}\int_V \frac{|ds|}{|s|}\Big) = \mathrm{O}(x^{-1}\ln^3 x) = \mathrm{O}\Big(\frac{x}{T}\ln^2 x\Big).$$

Einzusetzen in (4) ergibt die Behauptung

Die obige explizite Formel hat den Vorteil, daß man zur Herleitung des Primzahlsatzes mit Restglied bei vorgegebenem Nullstellenfreien Gebiet ohne eine obere Abschätzung für $|\zeta'/\zeta|$ auskommt. Für den Fall, daß die Riemannsche Vermutung gilt, ist dies besonders einfach.

5.5. Primzahlsatz unter Annahme der Riemannschen Vermutung(RV)

Im Fall der Richtigkeit der RV gilt der Primzahlsatz in der Form

$$\psi(x) = x + \mathrm{O}\big(x^{1/2}\ln^2 x\big), \tag{1}$$

$$\pi(x) = \operatorname{Li} x + \mathrm{O}\big(x^{1/2}\ln x\big). \tag{2}$$

Beweis. Zur Herleitung von (1) werde $T = x^{1/2}$ genommen (falls $x \geq 4$, ist $2 \leq T \leq x$). Die ρ–Summe in Satz 5.4. kann abgeschätzt werden durch

$$\begin{aligned}
&\sum_{\rho,|\mathrm{Im}\rho|\leq T} x^{1/2}\,|\rho|^{-1} \\
&= \mathrm{O}\Big(x^{1/2} \sum_{1\leq n\leq [T]} n^{-1}\#\big\{\rho; n < |\mathrm{Im}\,\rho| \leq n+1\big\}\Big), \\
&= \mathrm{O}\Big(x^{1/2} \sum_{n\leq [T]} n^{-1}\ln n\Big) \quad \text{(nach 4.5(1))} \\
&= \mathrm{O}\big(x^{1/2}\ln^2 T\big) = \mathrm{O}\big(x^{1/2}\ln^2 x\big).
\end{aligned}$$

Dies ergibt (1). (2) wieder aus (1) durch partielle Summation.

Aufgaben

1. Leiten Sie aus Satz 5.4. eine explizite Formel für $\pi(x)$ her. Welche Summanden treten an die Stelle von x^ρ/ρ ? Setzen Sie der Einfachheit halber $T \leq x^{1/2}$ voraus (warum?).

2. Beweisen Sie 5.3 (1) direkt aus dem Nullstellenfreien Gebiet in 4.2. und der expliziten Formel.

3. Legendre vermutete 1798, daß zwischen zwei aufeinanderfolgenden Quadratzahlen n^2 und $(n+1)^2$ $(n \geq 2)$ stets eine Primzahl liegt. Zeigen Sie mit 5.5., daß dies unter der RV für die Kuben n^3 und $(n+1)^3$ $(n \geq n_0)$ richtig ist.

4. Sei Li^{-1} die Umkehrfunktion der Funktion Li. Zeigen Sie für $n \geq 2$

$$p_n = n\text{–te Primzahl } = \mathrm{Li}^{-1}n + \mathrm{O}\big(n\exp(-C(\ln n)^{1/10})\big)$$

mit einem $C > 0$.

5. (1) Für $\alpha > 0$ ist

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \frac{y^2}{s^2}\,ds = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 < y \leq 1, \\ \ln y & \text{für } y \geq 1. \end{cases}$$

(2) Für $1 < \alpha \leq 2$ gilt

$$\sum_{n\leq x}\Lambda(n)\,\ln\frac{x}{n} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}\Big(-\frac{\zeta'}{\zeta}(s)\Big)\frac{x^s}{s^2}\,ds.$$

6. Die für $\sigma > 1$ durch die Reihe $\sum_p \ln p \cdot p^{-s}$ definierte Funktion kann meromorph in die Halbebene $\sigma > 0$ fortgesetzt werden. Es treten nur Pole erster Ordnung auf.

7. Für $\sigma > 1$ gilt

$$\sum_p \frac{1}{p^s} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(k)}{k}\, \zeta(ks).$$

8. Sei $R(x) = \psi(x) - x$.
(1) Für $\sigma > 1$ gilt

$$-\frac{\zeta'}{\zeta}(s) - \frac{s}{s-1} = s \int_1^{\infty} \frac{R(x)}{x^{s+1}}\, dx.$$

(2) Falls für ein $\alpha \in (0,1)$ $R(x) = \mathrm{O}(x^\alpha)$ $(x \geq 2)$ erfüllt ist, existiert keine Nullstelle ρ von $\zeta(s)$ mit $\mathrm{Re}\,\rho > \alpha$.

6. Kapitel. Charaktere und *L*–Reihen

Bei der Suche nach Primzahlen in einer Restklasse a mod k $\big((a,k) = 1\big)$ ist es naheliegend, die erzeugende Dirichlet–Reihe $\sum\limits_{n \equiv a(k)} \Lambda(n)\, n^{-s}$ zu betrachten. Dies führt zu Schwierigkeiten, da die Funktion

$$f(n) = \begin{cases} \Lambda(n), & \text{falls} \quad n \equiv a(k), \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

keine simplen Faltungs–Eigenschaften aufweist. Dirichlet (1837) löste das Problem, indem er die Indikatorfunktion der Restklasse a mod k als Linearkombination gewisser vollständig multiplikativer Funktionen darstellte, der Charaktere.

6.1. Satz und Def. $k \in \mathbb{N}$
(1) Es gibt genau $\varphi(k)$ Funktionen $\chi : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ mit
(i) $\big|\chi(g)\big| = 1$ für $(g,k) = 1$, $\chi(g) = 0$ für $(g,k) > 1$,
(ii) χ ist vollständig multiplikativ, d.h. $\forall\, g_1, g_2 :\ \chi(g_1 g_2) = \chi(g_1)\,\chi(g_2)$.
(iii) χ ist k–periodisch, d.h. $\forall\, g :\ \chi(g+k) = \chi(g)$.
Die χ heißen **Dirichlet**– oder **Restklassen–Charaktere** mod k.

(2) Der Charakter χ_0 mit $\chi_0(g) = 1$, falls $(g,k) = 1$, $\chi_0(g) = 0$ für $(g,k) > 1$ heißt der **Hauptcharakter** mod k.

(3) Für $(g,k) = 1$ und jedes χ mod k ist $\chi(g)$ $\varphi(k)$–te Einheitswurzel.

(4) Jede Funktion $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ mit den Eigenschaften (ii), (iii) und

$$f(g) = 0 \quad \text{für} \quad (g,k) > 1, \quad f(g) \neq 0 \quad \text{für} \quad (g,k) = 1$$

ist Charakter mod k.

(5) Die Menge der Charaktere mod k wird durch

$$(\chi_1 \cdot \chi_2)(g) \underset{\text{Df}}{=} \chi_1(g) \cdot \chi_2(g)$$

zu einer abelschen Gruppe, der **Charaktergruppe** mod k. χ_0 ist das neutrale Element, zu jedem χ ist $\bar{\chi}$ das Inverse. Die Charaktergruppe ist isomorph zur Gruppe $(\mathbb{Z}_k^*, \cdot)$.

Beweis. 1. Die Konstruktion der Charaktere wird durchsichtig, wenn man mit beliebigen endlichen abelschen Gruppen arbeitet. Nach dem Hauptsatz ist jede abelsche Gruppe G der Ordnung n (äußeres direktes) Produkt von zyklischen Gruppen $G_1, \ldots, G_r$ mit erzeugenden Elementen g_j und neutralen Elementen e_j, $\#G_j = n_j$, $n = n_1 \ldots n_r$. Jedem $g \in G$ ist bijektiv ein r–Tupel

$$\left(g_1^{a_1}, \ldots, g_r^{a_r}\right) \qquad (0 \le a_j \le n_j - 1)$$

zugeordnet. Multiplikation in G entspricht Addition der Exponenten a_j mit Reduktion mod n_j in der j–ten Komponente.
Kurz: $G \cong G_1 \times \ldots \times G_r$.

Sei ξ ein Homomorphismus von G in $(\mathbb{C}^*, \cdot)$. Dann induziert ξ Homomorphismen ξ_j von G_j in $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ und

$$\xi(g) = \left(\xi_1(g_1)\right)^{a_1} \cdots \left(\xi_r(g_r)\right)^{a_r}. \tag{1}$$

Wegen $g_j^{n_j} = e_j$ ist $\left(\xi_j(g_j)\right)^{n_j} = 1$, d.h. die $\xi_j(g_j)$ sind n_j–te Einheitswurzeln. Jedes r–Tupel von Einheitswurzeln $(\eta_1, \ldots, \eta_r)$ induziert einen Homomorphismus, und umgekehrt. Es gibt also genau $n_1 \ldots n_r = n$ Homomorphismen ξ. Diese werden auch **Gruppen–Charaktere** genannt. ξ_0 zu dem r–Tupel $(1, \ldots, 1)$ heißt der **Hauptcharakter**.

2. Die allgemeinen Überlegungen werden auf $G = (\mathbb{Z}_k^*, \cdot)$ angewandt.

Für $k = p^\ell$, $2 < p$ ist G nach dem Satz über Primitivwurzeln zyklisch. Sei b eine PW mod p^ℓ. Zu jedem $h \in \mathbb{Z}$ mit $(h, k) = 1$ existiert genau ein $a \in \{0, \ldots, \varphi(p^\ell) - 1\}$ mit $h \equiv b^a \bmod p^\ell$.

Allgemeiner: Sei

$$k = p_1^{\ell_1} \ldots p_r^{\ell_r}, \qquad 2 < p_1 < \cdots < p_r$$

mit Primitivwurzeln b_j mod $p_j^{l_j}$. Zu $h \in \mathbb{Z}$ mit $(h, k) = 1$ existieren eindeutig $a_j \in \left\{0, \ldots, \varphi(p_j^{\ell_j}) - 1\right\}$ und

$$h \equiv b_j^{a_j} \left(p_j^{\ell_j}\right) \qquad (j = 1, \ldots, r).$$

Im Sinn des direkten Produkts also

$$\bar{h} \leftrightsquigarrow \left(b_1^{a_1}, \ldots, b_r^{a_r}\right) \qquad (\bar{h} = h + k\mathbb{Z}).$$

Das Exponententupel $(a_1, \ldots, a_r)$ heißt auch das **Index–System** zu h (bezüglich der PW $b_1, \ldots, b_r$).

Die Homomorphismen $\xi : \mathbb{Z}_k^* \to \mathbb{C}^*$ werden also durch r–Tupel von Einheitswurzeln $(\eta_1, \ldots, \eta_r)$ $\big(\eta_j \quad \varphi(p_j^{\ell_j})$–te EW) gegeben. $\xi(\bar{h}) = \eta_1^{a_1} \ldots \eta_r^{a_r}$.

Falls eine Zweierpotenz das k teilt, kann ähnlich vorgegangen werden.

3. Jeder Gruppencharakter ξ auf $\mathbb{Z}_k^*$ induziert einen Dirichlet–Charakter, und umgekehrt:

$$\chi(h) \underset{\text{Df}}{=} \begin{cases} \xi(\bar{h}) & \text{für} \quad (h,k) = 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Multiplikativität und Periodizität folgen aus der Homomorphie. Wegen der k–Periodizität liefert jedes χ ein ξ. Damit sind (1), (2) und (3) gesichert.

4. Sei f eine Funktion wie in (4).
Dann wird durch

$$\xi(\bar{h}) \underset{\text{Df}}{=} f(h) \qquad \big((h,k) = 1\big)$$

ein Homomorphismus und damit ein Charakter definiert.

5. Zur Struktur der Charaktergruppe im allgemeinen Fall. Sind ξ und $\tilde{\xi}$ Charaktere von

$$G \cong G_1 \times \cdots \times G_r \to \mathbb{C}^*,$$

dann ist auch $\xi \cdot \tilde{\xi}$ ein solcher. Der Hauptcharakter ξ_0 spielt die Rolle des neutralen Elements. Mit ξ ist auch $\bar{\xi}$ ein Charakter, wegen $\xi(g) \cdot \bar{\xi}(g) = 1$ ist $\bar{\xi}$ invers zu ξ.

Seien $\eta_1, \ldots, \eta_r$ primitive n_j–te Einheitswurzeln. Jedes Einheitswurzel–r–Tupel $(\omega_1, \ldots, \omega_r)$ läßt sich als

$$\big(\eta_1^{a_1}, \ldots, \eta_r^{a_r}\big) \qquad (0 \le a_j \le n_j - 1)$$

schreiben. Dann wird durch

$$g \leftrightsquigarrow \big(g_1^{a_1}, \ldots, g_r^{a_r}\big) \longrightarrow \xi \leftrightsquigarrow \big(\eta_1^{a_1}, \ldots, \eta_r^{a_r}\big)$$

ein Isomorphismus zwischen G und der Charaktergruppe definiert.

Beispiele.
1. $k = 5$. Hier ist $b = 2$ Primitivwurzel, $1 \equiv 2^0$, $2 \equiv 2^1$, $3 \equiv 2^3$, $4 \equiv 2^2 \bmod 5$. $\eta = i$ ist primitive vierte Einheitswurzel. $\eta^0 = 1$, $\eta^1 = i$, $\eta^2 = -1$, $\eta^3 = -i$.
Die vier Charaktere mod 5 entstehen dadurch, daß man $b = 2$ die vier möglichen η–Potenzen zuordnet. Die Charaktertafel (nur für $(g,5) = 1$ angegeben) lautet damit

	1	2	3	4
$\chi_0 : 2 \rightsquigarrow 1$	1	1	1	1
$\chi_1 : 2 \rightsquigarrow i$	1	i	$-i$	-1
$\chi_2 : 2 \rightsquigarrow -1$	1	-1	-1	1
$\chi_3 : 2 \rightsquigarrow -i$	1	$-i$	i	-1

2. $k = 12 = 2^2 \cdot 3$.
Hier ist $\mathbb{Z}_{12}^* \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. $b_1 = 3$ ist Primitivwurzel mod 4, $b_2 = 2$ mod 3.
Die Indexsysteme sind

$$h = 1 : (0,0), \quad h = 5 : (0,1),$$
$$h = 7 : (1,0), \quad h = 11 : (1,1).$$

$\eta_1 = -1$ und $\eta_2 = -1$ sind zweite primitive Einheitswurzeln. Die Charaktertafel lautet hier

	1	5	7	11
$\chi_0 : (2,3) \rightsquigarrow (1,1)$	1	1	1	1
$\chi_1 : (2,3) \rightsquigarrow (1,-1)$	1	-1	1	-1
$\chi_2 : (2,3) \rightsquigarrow (-1,1)$	1	1	-1	-1
$\chi_3 : (2,3) \rightsquigarrow (-1,-1)$	1	-1	-1	1

3. $k = p > 2$.
Das Legendre–Symbol $\left(\frac{\cdot}{p}\right)$ wird durch die Ergänzung $\left(\frac{h}{p}\right) = 0$ für $p|h$ zu einem Charakter mod p. Außer dem Hauptcharakter ist es der einzige reellwertige mod p. Denn die einzigen reellen $(p-1)$–ten Einheitswurzeln sind $\eta = \pm 1$.

Zum Glück wird es im Folgenden i.a. nicht nötig sein, die Werte der Charaktere im einzelnen zu kennen. Wichtig ist, was die obigen Beispiele vermuten lassen, daß in der Charaktertafel Zeilen– und Spaltensummen (außer der ersten) Null ergeben.

6.2. Orthogonalitätsrelationen.

(1) Sei χ ein Charakter mod k.

Beh. $$\sum_{h \bmod k} \chi(h) = \begin{cases} \varphi(k), & \text{falls} \quad \chi = \chi_0, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

h durchläuft ein volles (oder reduziertes) Restsystem mod k.

(2) $(h,k) = 1$.

Beh. $$\sum_{\chi \bmod k} \chi(h) = \begin{cases} \varphi(k), & \text{falls} \quad h \equiv 1(k), \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

χ durchläuft die $\varphi(k)$ Charaktere mod k.

Beweis zu (1). Im Fall $\chi = \chi_0$ ist die Aussage klar. Sei $\chi \neq \chi_0$. Dann existiert ein g mit $(g,k) = 1$ und $\chi(g) \neq 1$. Mit h durchläuft gh ein reduziertes Restsystem mod k.

Mit der k–Periodizität und der Multiplikativität von χ folgt

$$\sum_{h \bmod k} \chi(h) = \sum_{h \bmod k} \chi(hg) = \chi(g) \sum_{h \bmod k} \chi(h).$$

Wegen $\chi(g) \neq 1$ muß die Summe verschwinden.

Zu (2). Sei $h \not\equiv 1(k)$. Dann existiert ein χ_1 mit $\chi_1(h) \neq 1$. Sei wie oben $\mathbb{Z}_k^* \cong \mathbb{Z}_{n_1} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{n_r}$,

$$\bar{h} \leftrightsquigarrow \left(g_1^{a_1}, \ldots, g_r^{a_r}\right), \quad 0 \leq a_j \leq n_j - 1,$$
$$\chi \leftrightsquigarrow \left(\eta_1^{b_1}, \ldots, \eta_r^{b_r}\right), \quad \eta_j^{n_j} = 1, \quad \eta_j \text{ primitiv}.$$

Dann ist wegen $\bar{h} \neq \bar{1}$ mindestens ein $a_j > 0$, oBdA $a_1 > 0$. Es werde χ_1 durch das r–Tupel $(\eta_1, 1, \ldots, 1)$ gegeben.

$$\chi_1(h) = \eta_1^{a_1} \cdot 1^{a_2} \cdots 1^{a_r} = \eta_1^{a_1} \neq 1.$$

Der Rest verläuft so wie (1). Nach der Gruppeneigenschaft der Charaktermenge durchläuft mit χ auch $\chi_1\chi$ alle Charaktere mod k

$$\sum_{\chi \bmod k} \chi(h) = \sum_{\chi \bmod k} (\chi\chi_1)(h) = \chi_1(h) \sum_{\chi \bmod k} \chi(h).$$

Dies bedingt, daß die Summe verschwindet.

Der nächste Hilfssatz enthält das angekündigte Prinzip, Summen über Restklassen auf vollständige Summen mit Charakteren zurückzuführen.

6.3. Hilfssatz. Sei $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$, $\sum\limits_n \left|f(n)\right| < \infty$, $(a,k) = 1$. Dann gilt

$$\sum_{n \in \mathcal{N}, n \equiv a(k)} f(n) = \frac{1}{\varphi(k)} \sum_{\chi \bmod k} \bar{\chi}(a) \sum_{n \in \mathcal{N}} f(n)\, \chi(n).$$

Beweis. Sei $aa^* \equiv 1(k)$. Dann ist für jedes $\chi \bmod k \quad 1 = \chi(1) = \chi(aa^*) = \chi(a)\,\chi(a^*)$, also $\chi(a^*) = \bar{\chi}(a)$.
Für $(k,a) = 1$ wird daraus mit 6.2(2)

$$\begin{aligned}\frac{1}{\varphi(k)} \sum_{\chi \bmod k} \bar{\chi}(a)\,\chi(n) &= \frac{1}{\varphi(k)} \sum_{\chi} \chi(a^*n) \\ &= \begin{cases} 1, & \text{falls} \quad a^*n \equiv 1(k) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1, & \text{falls} \quad n \equiv a(k) \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}\end{aligned}$$

Da in $\sum\limits_n f(n)\,\chi(n)$ die n mit $(n,k) > 1$ das Gewicht 0 erhalten, folgt die Behauptung

6.4. Hilfssatz. Für $\chi \neq \chi_0 \bmod k,\ 0 < A < B$ gilt

$$\Big| \sum_{A<n\leq B} \chi(n) \Big| \leq \varphi(k).$$

Beweis. Das Intervall $(A, B]$ wird in Teile der Länge k und ein Reststück zerlegt. Die Summen über eine volle Periode verschwinden nach 6.2(1), das Reststück bringt $\leq \varphi(k)$ Summanden vom Betrag Eins.

Eine mit der Riemannschen Zeta–Funktion vergleichbare Rolle spielen die Dirichlet–Reihen zu den Charakteren.

6.5. Satz und Def. $k \in \mathbb{N}$
(1) Für jeden Charakter $\chi \bmod k$ mit $\chi \neq \chi_0$ konvergiert die Reihe

$$L(s, \chi) \underset{\text{Df}}{=} \sum_n \chi(n)\, n^{-s}$$

kompakt für $\sigma > 0$ (und stellt dort eine holomorphe Funktion dar). Für $\sigma > 1$ gilt die Produktformel

$$L(s, \chi) = \prod_{p \not| k} \Big(1 - \frac{\chi(p)}{p^s}\Big)^{-1}$$

(**Dirichletsche *L*–Reihen**).

(2) Die Reihe

$$L(s, \chi_0) = \sum_n \chi_0(n)\, n^{-s} \qquad (\chi = \chi_0 \bmod k)$$

konvergiert kompakt und absolut für $\sigma > 1$. In $\mathbb{C}$ gilt

$$L(s, \chi_0) = \zeta(s) \cdot \prod_{p|k} \Big(1 - \frac{1}{p^s}\Big).$$

Beweis. 1. Sei K ein kompakter Teil von $\{s, \sigma > 0\}$. Insbesondere ist für alle $s \in K$

$$\operatorname{Re} s \geq \delta = \delta(K) > 0, \quad |s| \leq C = C(K).$$

Für $0 < A < B$ sieht man mit partieller Summation

$$\begin{aligned} S = S(\chi, A, B, s) &\underset{\text{Df}}{=} \sum_{A<n\leq B} \chi(n)\, n^{-s} \\ &= \sum_{A<n\leq B} \chi(n)\, B^{-s} - \int_A^B \sum_{A<n\leq t} \chi(n)\ \frac{d}{dt}(t^{-s})\, dt, \end{aligned}$$

also wegen 6.4.

$$|S| \leq \varphi(k)\, B^{-\delta} + \varphi(k)\ \frac{C}{\delta}\, A^{-\delta} \leq \varphi(k)(C\,\delta^{-1} + 1)\, A^{-\delta},$$

woraus sich die gleichmäßige Konvergenz und damit die Holomorphie von $L(s,\chi)$ ergibt.

2. Für $\sigma > 1$ konvergieren alle $L(s,\chi)$ absolut. Es ist Hilfssatz 2.4. anwendbar

$$\begin{aligned} L(s,\chi) &= \prod_p \Big(1 + \frac{\chi(p)}{p^s} + \frac{\chi(p^2)}{p^{2s}} + \dots\Big) \\ &= \prod_{p \nmid k} \Big(1 + \frac{\chi(p)}{p^s} + \Big(\frac{\chi(p)}{p^s}\Big)^2 + \dots\Big) = \prod_{p \nmid} \Big(1 - \frac{\chi(p)}{p^s}\Big)^{-1}. \end{aligned}$$

Im Fall $\chi = \chi_0$ folgt unmittelbar

$$L(s,\chi_0) = \prod_{p \nmid k} \Big(1 - \frac{1}{p^s}\Big)^{-1} = \zeta(s) \cdot \prod_{p|k} \Big(1 - \frac{1}{p^s}\Big).$$

Bemerkung. Während $L(s,\chi_0)$ keine neuen Probleme bietet, müssen die vielen $L(s,\chi)$ $(\chi \neq \chi_0 \bmod k)$ ähnlich wie die Zeta–Funktionen neu untersucht werden. Wie im nächsten Kapitel gezeigt wird, sind einige Ideen übertragbar, andere müssen neu entwickelt werden.

Es sei noch erwähnt, daß die $L(s,\chi)$ $(\chi \neq \chi_0)$ auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph fortgesetzt werden können und Funktionalgleichungen genügen, in denen $L(s,\chi)$ und $L(1-s,\bar\chi)$ miteinander verknüpft werden.

Aufgaben.

1. Bestimmen Sie die Charaktere mod 15.

2. Geben Sie alle Homomorphismen der Gruppe $(\mathbb{Z}_k, +)$ in $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ an. Bestehen auch hier Orthogonalitätsrelationen?

3. Sei $\chi \neq \chi_0 \bmod p$ $(p > 2)$, $\xi = \exp(2\pi i/p)$, $\tau(\chi) = \sum_{n=1}^{p-1} \chi(n)\,\xi^n$.

(**Gauss'sche Summe**).

Beh.

(1) $|\tau(\chi)| = p^{1/2}$

(2) $\forall\, n : \chi(n)\,\tau(\bar\chi) = \sum_{a=1}^{p-1} \bar\chi(a)\,\xi^{an}$.

(3) Für $N \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{n \le N} \chi(n) = \frac{1}{\tau(\bar\chi)} \sum_{a=1}^{p-1} \bar\chi(a) \sum_{n \le N} \xi^{an}.$$

(4) $\Big|\sum_{n \le N} \chi(n)\Big| \le p^{-1/2} \sum_{a=1}^{p-1} \Big(\sin\Big(\frac{\pi a}{p}\Big)\Big)^{-1}$.

(5) Für $0 < y \le 1/2$ gilt $\sin \pi y \ge 2y$.

(6) $\displaystyle\sum_{n \le N} \chi(n) = \mathrm{O}\big(p^{1/2} \ln p\big)$

(mit absoluter O–Konstanten). Spezialfall der **Ungleichung** von **Pólya–Vinogradov** (George P., 1887–1985; Ivan Matveevich V., 1891–1983).

7. Kapitel. Primzahlen in Progressionen

Dirichlet konnte 1837 als erster zeigen, daß jede Restklasse $a \bmod k$ mit $(a,k) = 1$ unendlich viele Primzahlen enthält. Mit Aussagen über die Nullstellenfreiheit der L–Funktionen, ähnlich wie zur Zeta–Funktion in Kapitel 2, sowie dem Newmanschen Tauber–Satz ist es möglich, relativ rasch den Primzahlsatz in Progressionen

$$\pi(x,k,a) \underset{\mathrm{Df}}{=} \#\big\{p \le x,\ p \equiv a(k)\big\} = \frac{1}{\varphi(k)}\,\frac{x}{\ln x} \cdot \big(1 + \mathrm{o}(1)\big)$$

zu beweisen. Die Primzahlen verteilen sich danach asymptotisch gleichmäßig auf die $\varphi(k)$ reduzierten Restklassen mod k.

7.1. Hilfssatz. Für $\sigma > 1$ und $(a,k) = 1$ gilt

$$\sum_{n \in \mathcal{N},\, n \equiv a(k)} \Lambda(n)\, n^{-s} = \frac{1}{\varphi(k)} \sum_{\chi \bmod k} \bar\chi(a) \Big(- \frac{L'}{L}\,(s,\chi)\Big).$$

Beweis.
1. Wegen der vollständigen Multiplikativität der Charaktere hat man für jedes $\chi \bmod k$

$$\begin{aligned}\big((\mu \cdot \chi) * (\underline{1} \cdot \chi)\big)(n) &= \sum_{d \mid n} \mu(d)\, \chi(d)\, \chi\Big(\frac{n}{d}\Big) \\ &= \chi(n) \sum_{d \mid n} \mu(d) = \chi(n)\, \varepsilon(n) = \varepsilon(n),\end{aligned}$$

also nach dem Multiplikationssatz

$$\sum_n \mu(n)\, \chi(n)\, n^{-s} \cdot \sum_m \chi(n)\, n^{-s} = 1,$$

$$\sum_n \mu(n)\, \chi(n)\, n^{-s} = \big(L(s,\chi)\big)^{-1} \quad \text{für} \quad \sigma > 1.$$

Insbesondere ist $L(s,\chi) \ne 0$ für $\sigma > 1$.

2. Ähnlich sieht man $(\Lambda \cdot \chi) * (\underline{1} \cdot \chi) = \chi \ln$, also

$$\sum_n \Lambda(n)\, \chi(n)\, n^{-s} \cdot L(s,\chi) = \sum_n \chi(n) \ln n \cdot n^{-s} = -L'(s,\chi),$$

$$\sum_n \Lambda(n)\, \chi(n)\, n^{-s} = -L'/L(s,\chi).$$

3. Aus 6.3. ergibt sich für $\sigma > 1$

$$\sum_{n\equiv a(k)} \Lambda(n)\, n^{-s} = \frac{1}{\varphi(k)} \sum_{\chi \bmod k} \bar{\chi}(a) \sum_{n} \Lambda(n)\, \chi(n)\, n^{-s},$$

was mit 2. zur Behauptung führt.

Im Hinblick auf die Anwendung des Tauber–Satzes sind die Singularitäten der L'/L auf der 1–Geraden zu untersuchen.

Nach 6.5(2) gilt

$$\frac{L'}{L}(s,\chi_0) = \frac{\zeta'}{\zeta}(s) + \frac{P_k'}{P_k}(s) \quad \Big(P_k(s) = \prod_{p|k}\Big(1 - \frac{1}{p^s}\Big)\Big).$$

Da P_k für $\sigma > 0$ holomorph und ohne Nullstellen ist, hat $L'/L(s,\chi_0)$ bei $s = 1$ einen Pol erster Ordnung mit Residuum 1, und ist holomorph auf dem Rest der Vertikalen.

7.2. Satz.
(1) Für $\chi \bmod k,\ \chi \neq \chi_0$ ist $L(s,\chi)$ holomorph und $\neq 0$ für $s = 1 + i\tau,\ \tau \in \mathbb{R}$.

(2) $L(s,\chi_0)$ hat bei $s = 1$ einen Pol erster Ordnung mit Residuum 1 und ist holomorph und $\neq 0$ für $s = 1 + i\tau,\ \tau \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Beweis zu (1).
1. Es wird sich herausstellen, daß die de la Vallée–Poussin–Methode auf die L–Reihen übertragbar ist bis auf den Fall

$$\chi \neq \chi_0, \quad \chi^2 = \chi_0 \quad \text{(d.h. reellwertig)}, \quad \tau = 0$$

1.1. Für $\sigma > 1$ sieht man wie im Beweis zu Satz 2.6.

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Re}\Big(3\,\frac{L'}{L}(\sigma,\chi_0) + 4\,\frac{L'}{L}(\sigma+i\tau,\chi) + \frac{L'}{L}(\sigma+2i\tau,\chi^2)\Big) \\
&\qquad = -\sum_{\substack{n\\(n,k)=1}} n^{-\sigma}\Lambda(n)\ \mathrm{Re}\big(3 + 4\chi(n)\,n^{-i\tau} + \chi^2(n)\,n^{-2i\tau}\big) \\
&\qquad = -\sum_{(n,k)=1} n^{-\sigma}\Lambda(n)(3 + 4\cos\varphi_n + \cos 2\varphi_n) \quad \big(\varphi_n = \arg\,\chi(n) - \tau\ln n\big) \\
&\qquad \leq 0.
\end{aligned}$$

1.2. Im Fall $\tau \neq 0$ verläuft die Argumentation wie früher. Habe $L(s,\chi)$ bei $1 + i\tau$ eine m–fache Nullstelle, $L(s,\chi^2)$ bei $2 + i\tau$ eine μ–fache ($\mu \in \mathbb{N}_0$). Dann verhält sich für $\sigma \to 1^+$

$$(*) \qquad 3\,\frac{L'}{L}(\sigma,\chi_0) + 4\,\frac{L'}{L}(\sigma+i\tau,\chi) + \frac{L'}{L}(\sigma+2i\tau,\chi^2)$$

wie $-\dfrac{3}{\sigma-1}+\dfrac{4m}{\sigma-1}+\dfrac{\mu}{\sigma-1}+$ Beschränktes. Dies führt zum Widerspruch zu 1.

1.3. Im Fall $\tau=0,\ \chi\neq\chi_0,\ \chi^2\neq\chi_0$ ist $L(s,\chi^2)$ bei $s=1$ holomorph und kann höchstens eine μ–fache Nullstelle haben. Hier kann wie in 1.2. argumentiert werden.

1.4. Im Fall $\tau=0,\ \chi\neq\chi_0,\ \chi^2=\chi_0$ hat $L(s,\chi^2)$ bei $s=1$ einen Pol. $(*)$ wird hier durch

$$-\frac{3}{\sigma-1}+\frac{4m}{\sigma-1}-\frac{1}{\sigma-1}+\text{ Beschränktes}$$

beschrieben. Jetzt kann man hieraus nur noch schließen, daß $L(s,\chi)$ bei $s=1$ keine mehrfache Nullstelle hat.

2. Zu der Aussage

$$L(1,\chi)\neq 0\quad\text{für}\quad\chi\neq\chi_0,\ \chi^2=\chi_0$$

gibt es zahlreiche Beweise. Am durchsichtigsten ist wohl der mit Hilfe des Landauschen Satzes 1.5.

2.1. Es werde $L(1,\chi)=0$ angenommen. Dann ist

$$F(s)\underset{\text{Df}}{=}\zeta(s)\,L(s,\chi)$$

holomorph für $\sigma>0$.

2.2. Für $\sigma>0$ gilt

$$F(s)=\sum_n f(n)\,n^{-s}\quad\text{mit}\quad f=\underline{1}*\chi.$$

f ist multiplikativ und ≥ 0, denn

$$f(p^\ell)=\sum_{0\leq\nu\leq\ell}\big(\chi(p)\big)^\nu=\begin{cases}1, & p|k\\ \ell+1, & p\nmid k,\ \chi(p)=1,\\ 1, & p\nmid k,\ \chi(p)=-1,\ \ell\equiv 0(2),\\ 0, & p\nmid k,\ \chi(p)=-1,\ \ell\equiv 1(2).\end{cases}$$

Insbesondere ist

$$f(m^2)\geq 1.$$

2.3. Die Reihe für F ist bei $s=1/2$ nach 2.2. divergent, d.h. die Konvergenzabszisse σ_0 zu F ist $\geq 1/2$.

2.4. Nach dem Satz von Landau, der auf F anwendbar ist, hat F eine Singularität bei σ_0, was aber der Holomorphie gemäß 2.1. widerspricht.

7.3. Primzahlsatz in Progressionen (Dirichlet, 1837; Hadamard, de la Vallée–Poussin, 1896). Für $(k,a)=1$ gilt

$$\psi(x,k,a)=\sum_{n\le x,\,n\equiv a(k)}\Lambda(n)=\frac{x}{\varphi(k)}\cdot\big(1+\mathrm{o}(1)\big), \tag{1}$$

$$\pi(x,k,a)=\#\big\{p\le x,\ p\equiv(k)\big\}=\frac{1}{\varphi(k)}\,\frac{x}{\ln x}\cdot\big(1+\mathrm{o}(1)\big). \tag{2}$$

Die von o(1) induzierten Funktionen können von k und a abhängen.

Da der Beweis mit Hilfe des Newmanschen Tauber–Satzes wie beim gewöhnlichen Primzahlsatz verläuft, reichen ein paar Hinweise. Es kam dort darauf an, daß

$$\sum_n\Lambda(n)\,n^{-s}-\frac{1}{s-1}=-\frac{\zeta'}{\zeta}\,(s)-\frac{1}{s-1}$$

holomorph auf die Gerade $\{s,\sigma=1\}$ fortsetzbar ist.
Nach 7.1. und 7.2. trifft dies auch auf

$$\sum_{n\equiv a(k)}\Lambda(n)\,n^{-s}-\frac{1}{\varphi(k)(s-1)}$$

zu. Denn allein der Hauptcharakter χ_0 liefert in 7.1. einen Pol–Beitrag.

Bemerkung. Wie in Kapitel 5 kann für jede L–Funktion ein Nullstellenfreies Gebiet hergeleitet werden. Dementsprechend beweist man

$$\pi(x,k,a)=\frac{\mathrm{Li}x}{\varphi(k)}+\mathrm{O}\big(x\exp(-C(\ln x)^{1/10})\big),$$

wobei O–Konstante und C von k abhängen können.

Die für viele Anwendungen wichtige Frage nach Gleichmäßigkeit der Fehler–Abschätzung in Bezug auf k und a wird in Kapitel 9 verfolgt.

Aufgaben.

1. Folgern Sie aus dem Primzahlsatz in Progressionen, daß unendlich viele Primzahlen existieren, deren Dezimaldarstellung mit 1 beginnt und mit 7 endet.

2. Seien $p_1,\dots,p_k$ verschiedene ungerade Primzahlen und $\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_k\in\{1,-1\}$. Zeigen Sie, daß die Primzahlmengen

a) $M_1=\Big\{p,\Big(\frac{p}{p_1}\Big)=\varepsilon_1,\dots,\Big(\frac{p}{p_k}\Big)=\varepsilon_k\Big\}$,

b) $M_2=\Big\{p,\Big(\frac{p_1}{p}\Big)=\varepsilon_1,\dots,\Big(\frac{p_k}{p}\Big)=\varepsilon_k\Big\}$

unendlich sind.

3. Für $\sigma > 1$ gilt

$$\prod_{\chi \bmod k} L(s,\chi) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, n^{-s} \quad \text{mit} \quad a_1 = 1,\ a_n \geq 0 \quad \text{für} \quad n \geq 2.$$

4. (1) Aus $L(1,\chi) \neq 0$ für alle $\chi \bmod k,\ \chi \neq \chi_0$ folgere man

$$\lim_{\sigma \to 1^+} (\sigma - 1) \prod_{\chi \bmod k} L(\sigma,\chi) \quad \text{existiert und ist} \quad \neq 0.$$

(2). Aus (1) ergibt sich

$$\sum_{p \equiv 1(k)} \frac{1}{p} \quad \text{divergiert,}$$

d.h. in der 1–Restklasse mod k liegen unendlich viele Primzahlen.

8. Kapitel. Summen zweier Quadrate

In der elementaren Zahlentheorie wird gezeigt, daß ein $n \in \mathbb{N}$ genau dann Summe zweier Quadrate $\in \mathbb{N}_0$ ist, wenn in der kanonischen Zerlegung von n die Primteiler p mit $p \equiv 3(4)$ in gerader Potenz auftreten.

8.1. Def.

$$b(n) \underset{\text{Df}}{=} \begin{cases} 1 & \text{falls} \quad n = a_1^2 + a_2^2 \quad \text{mit} \quad a_1, a_2 \in \mathbb{N}_0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

b ist multiplikativ mit

$$b(p^\ell) = 1 \quad \text{falls} \quad p = 2 \quad \text{oder} \quad p \equiv 1(4) \quad \text{oder} \quad \big(p \equiv 3(4) \quad \text{und} \quad \ell \equiv 0(2)\big)$$
$$b(p^\ell) = 0 \quad \text{sonst.}$$

Die Zahlen mit $b(n) = 1$ werden auch ***B*–Zahlen** genannt.

8.2. Satz. Sei $L(s) = \sum_n \chi(n)\, n^{-s}$ $(\sigma > 0)$ die L–Reihe zum Nicht–Hauptcharakter χ mod 4 $\big(\chi(n) = 1$, falls $n \equiv 1(4)$; $\chi(n) = -1$, falls $n \equiv 3(4)$; $\chi(n) = 0$ für $2|n\big)$.

$$B(s) \underset{\text{Df}}{=} \sum_n b(n)\, n^{-s} \quad (\sigma > 1).$$

Dann gilt für $\sigma > 1/2$

$$B^2(s) = (1 - 2^{-s})^{-1}\, \zeta(s)\, L(s)\, P(s)$$

mit

$$P(s) = \prod_{p \equiv 3(4)} \big(1 - p^{-2s}\big)^{-1} = \sum_{n, p|n \Rightarrow p \equiv 3(4)} n^{-2s}.$$

P ist holomorph und $\neq 0$ für $\sigma > 1/2$. P ist gleichmäßig beschränkt in jeder Halbebene $\sigma \geq 1/2 + \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$.

Beweis. Wegen der Multiplikativität von $b(n)$ kann $B(s)$ für $\sigma > 1$ als Euler–Produkt geschrieben werden.

$$B(s) = \Big(1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{2^{2s}} + \dots\Big) \prod_{p\equiv 1(4)} \Big(1 + \frac{1}{p^s} + \dots\Big) \prod_{p\equiv 3(4)} \Big(1 + \frac{1}{p^{2s}} + \frac{1}{p^{4s}} + \dots\Big),$$

Entsprechend sieht man

$$\zeta(s)\, L(s) = (1 - 2^{-s})^{-1} \prod_{p\equiv 1(4)} \big(1 - p^{-s}\big)^{-2} \prod_{p\equiv 3(4)} \big(1 - p^{-s}\big)^{-1} \big(1 + p^{-s}\big)^{-1}$$

und somit

$$\begin{aligned} \frac{B^2(s)}{\zeta(s)L(s)} &= \big(1 - 2^{-s}\big)^{-1} \prod_{p\equiv 3(4)} \big(1 - p^{-2s}\big)^{-2} \cdot \big(1 - p^{-2s}\big) \\ &= \big(1 - 2^{-s}\big)^{-1} P(s). \end{aligned}$$

$P(s)$ kann wieder als Reihe geschrieben werden. Die Reihe konvergiert absolut und gleichmäßig in jeder Halbebene $\sigma \geq 1/2 + \varepsilon$.

Daß $P(s)$ in $\sigma > 1/2$ nicht verschwindet, folgt entweder aus der Konvergenz des Produktes, in dem kein Faktor verschwindet, oder man bestimmt $\tilde{P}(s) = \sum\limits_n \tilde{p}(n)\, n^{-2s}$ mit $P(s)\tilde{P}(s) = 1$.

Will man $Q(x) \underset{\text{Df}}{=} \sum\limits_{n\leq x} b(n)$ mit analytischen Hilfsmitteln untersuchen, dann muß mit $\big(\zeta(s)\, L(s)\big)^{1/2}$ gearbeitet werden. Für $\sigma > 1$ ist wegen des Nicht–Verschwindens aller Faktoren in B^2 keine Komplikation zu erwarten. Der Pol von ζ bei $s = 1$ führt zu einem „Pol gebrochener Ordnung“. Weitere solche kritischen Punkte treten nicht auf, wenn man im Nullstellenfreien Bereich von ζ und L bleibt. Die im Folgenden durchgeführte Integration ist ein Beispiel für den Umgang mit nicht isolierten Singularitäten.

Die Beweise zu Satz 4.2. lassen sich wortgetreu auf $L(s)$ übertragen.

8.3. Satz. Es existieren C_1 und $C_2 > 0$, so daß für

$$|\tau| \geq 2, \quad \sigma \geq 1 - C_1 \ln^9 |\tau|$$

$L(s)$ und $\zeta(s)$ nicht verschwinden und dort

$$\big|L(s)\big| + \big|\zeta(s)\big| \leq C_2 \ln |\tau|$$

erfüllen.

8.4. Satz von Landau (1912). Für $x \geq 2$ gilt

$$Q(x) \underset{\text{Df}}{=} \#\{n \leq x, n = a^2 + b^2;\ a, b \in \mathbb{N}_0\}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\prod_{p \equiv 3(4)} \Big(1 - \frac{1}{p^2}\Big)\Big)^{-1/2} \frac{x}{(\ln x)^{1/2}} + \mathrm{O}\Big(\frac{x}{(\ln x)^{3/2}}\Big).$$

Beweis.
1. Die Funktion

$$(s-1)\, B^2(s) = (s-1)(1-2^{-s})^{-1}\zeta(s)\, L(s)\, P(s)$$

ist holomorph und $\neq 0$ im Bereich von Satz 8.3. Da $\zeta(s)\, L(s)$ auf der Strecke $s = 1 + i\tau,\ |\tau| \leq 2$ nicht verschwindet, gibt es C_2 und C_3, so daß für $2 \leq T \leq x$ und

$$|\tau| \leq T,\ \sigma \geq 1 - C_2 \ln^{-9} T \tag{1.1}$$

$\zeta(s)\, L(s) \neq 0$ gilt, sowie

$$|s-1|\big|\zeta(s)\big|\ \big|L(s)\big| \leq C_3 \ln^2 T$$

erfüllt ist.

Im Bereich (1.1) kann

$$W(s) \underset{\text{Df}}{=} \big((s-1)(1-2^{-s})^{-1}\zeta(s)\, L(s)\, P(s)\big)^{1/2} \tag{1.2}$$

holomorph definiert werden. Da die Funktion unter der Wurzel für $s = \sigma \in (1, \infty)$ reell und positiv ist, kann hierfür die positive reelle Quadratwurzel genommen werden. Diese wird stetig auf (1.1) fortgesetzt.

2. $\sqrt{s-1}$ wird für $s = \sigma > 1$ positiv definiert und ist auf (1.1) bis auf $\{s = \sigma,\ \sigma \leq 1\}$ holomorph fortsetzbar. Auf dem oberen Ufer des Schnittes $(s = \sigma \leq 1)$ ist

$$s - 1 = e^{i\pi}(1-\sigma), \quad \sqrt{s-1} = i\,(1-\sigma)^{1/2}, \tag{2.1}$$

auf dem unteren Ufer

$$s - 1 = e^{-i\pi}(1-\sigma), \quad \sqrt{s-1} = -i\,(1-\sigma)^{1/2}. \tag{2.2}$$

(Mit $(\ )^{1/2}$ ist die positive reelle Wurzel gemeint).

3. Die Perronsche Formel liefert mit $\alpha = 1 + (\ln x)^{-1}$.

$$Q(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha - iT}^{\alpha + iT} \frac{1}{\sqrt{s-1}}\, W(s)\, \frac{x^s}{s}\, ds + \mathrm{O}\Big(\frac{x}{T}\, \ln x\Big).$$

Wegen des „Pols halber Ordnung“ von $(s-1)^{-1/2}$ bei $s = 1$ kann jetzt nicht der Residuensatz angewandt werden. Der Schnitt muß in Form eines „Schlüssellochwegs“ umgangen werden.

Sei Γ der Weg, bestehend aus folgenden Stücken:
Γ_1: die Strecke von $\alpha - iT$ nach $\sigma_1 - iT$, $\sigma_1 \underset{\text{Df}}{=} 1 - C_2 \ln^{-9} T$,

Γ_2: die Strecke von $\sigma_1 - iT$ nach $\sigma_1 (= \sigma - i \cdot 0)$,

Γ_3: die Strecke (am unteren Ufer des Schnittes) von σ_1 nach $1 - \varepsilon$ $(0 < \varepsilon < 1/\ln x)$,

Γ_4: der Kreis vom Radius ε um $s = 1$ von $1 - \varepsilon - i \cdot 0$ gegen den Uhrzeigersinn nach $1 - \varepsilon + i \cdot \mathrm{O}$,

Γ_5: die Strecke von $1 - \varepsilon$ am obereren Ufer des Schnittes nach σ_1,

Γ_6: die Strecke von σ_1 nach $\sigma_1 + iT$,

Γ_7: die Strecke von $\sigma + iT$ nach $\alpha + iT$.

Der Cauchysche Satz ergibt

$$Q(x) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{1}{\sqrt{s-1}}\, W(s)\, \frac{x^s}{s}\, ds + \mathrm{O}\Big(\frac{x}{T}\, \ln x\Big). \tag{3}$$

Der Haupt–Beitrag wird von Γ_4 und Γ_5 kommen, die übrigen Wegstücke liefern Fehlerterme.

4. Die Integrale über $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_6$ und Γ_7 können mit Satz 8.3. ähnlich wie im Beweis zu Satz 5.3 durch $\mathrm{O}\big(x^{\sigma_1} \ln^{14} x + \frac{x}{T} \ln x\big)$ abgeschätzt werden. Wählt man

$$T = \exp\big(C_4 (\ln x)^{1/10}\big) \tag{4.1}$$

(mit genügend kleinem C_4), dann wird dies zu $\mathrm{O}\big(x(\ln x)^{-3/2}\big)$.

Auf dem Kreis Γ_4 ist $\big|(s-1)^{1/2}\big| = \varepsilon^{1/2}$, $W(s) = \mathrm{O}(1)$, also mit der Standard–Abschätzung

$$\int\limits_{\Gamma_4} \cdots = \mathrm{O}(\varepsilon^{1/2} x).$$

Wählt man

$$\varepsilon = x^{-1}, \tag{4.2}$$

dann wird dies auch zu $\mathrm{O}\big(x(\ln x)^{-3/2}\big)$.

Zusammenfassung mit (3) ergibt

$$Q(x) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_4 + \Gamma_5} \frac{1}{\sqrt{s-1}}\, W(s)\, \frac{x^s}{s}\, ds + \mathrm{O}\big(x(\ln x)^{-3/2}\big). \tag{4.3}$$

Die bisherigen Fehler könnten selbstverständlich besser, zum Beispiel durch $\mathrm{O}\big(x(\ln x)^{-A}\big)$ für jedes $A > 0$, abgeschätzt werden.

5. Nach (2.1) und (2.2) kann das Integral über Γ_4 und Γ_5, im Folgenden durch $I_{4,5}$ abgekürzt, als

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma_1}^{1-\varepsilon} \frac{1}{-i(1-\sigma)^{1/2}}\, W(\sigma)\, x^\sigma\, d\sigma + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{1-\varepsilon}^{\sigma_1} \frac{1}{i(1-\sigma)^{1/2}}\, W(\sigma)\, x^\sigma\, d\sigma$$
$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{\sigma_1}^{1-\varepsilon} (1-\sigma)^{-1/2}\, W(\sigma)\, x^\sigma\, d\sigma$$

geschrieben werden. Die Substitution $t = 1-\sigma$ gibt

$$I_{4,5} = \frac{x}{\pi}\int\limits_{\varepsilon}^{a} t^{-1/2}\, W(1-t)\, x^{-t}\, dt$$

mit $\xi = C_2(\ln T)^{-9}$. Der Mittelwertsatz liefert

$$W(1-t) = W(1) + \mathrm{O}\big(t \max_{\varepsilon\le t\le\xi} \big|W'(t)\big|\big) \tag{5.1}$$
$$= W(1) + \mathrm{O}(t).$$

Substituiert man noch $u = t\,\ln x$, also $x^{-t} = e^{-u}$, dann erhält man

$$I_{4,5} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_4+\Gamma_4} \frac{1}{\sqrt{s-1}}\, W(s)\, \frac{x^s}{s}\, ds$$
$$= \frac{x\,W(1)}{\pi(\ln x)^{1/2}}\int\limits_{\varepsilon\ln x}^{\xi\ln x} u^{-1/2}\, e^{-u}\, du + \mathrm{O}\Big(\frac{x}{(\ln x)^{3/2}}\int\limits_{\varepsilon\ln x}^{\xi\ln x} u^{1/2}\, e^{-u}\, du\Big). \tag{5.2}$$

Falls man den Satz in genauerer Form haben will, entwickelt man in (5.1) nach Taylor. Dies führt zu Haupttermen

$$c_1\,\frac{x}{(\ln x)^{1/2}} + c_2\,\frac{x}{(\ln x)^{3/2}} + \dots$$

Das Integral im O–Term in (5.2) ist Teil des konvergenten Integrals $\Gamma(3/2) = \int\limits_0^\infty u^{1/2}\, e^{-u}\, du$, der Fehler in (5.2) ist somit $\mathrm{O}\big(x(\ln x)^{-3/2}\big)$.

Das Integral im Hauptterm wird verglichen mit

$$\int\limits_0^\infty u^{-1/2}\, e^{-u}\, du = \Gamma(1/2) = \pi^{1/2}.$$

Wegen

$$\int\limits_0^{\varepsilon \ln x} u^{-1/2}\, e^{-u}\, du \le \int\limits_0^{x^{-1}\ln x} u^{-1/2}\, du = \mathrm{O}\big((x^{-1}\ln x)^{-1/2}\big) = \mathrm{O}(x^{-1/3})$$

und

$$\int\limits_{\xi \ln x}^{\infty} u^{-1/2}\, e^{-u}\, du = \mathrm{O}\Big(\int\limits_{C_5 (\ln x)^{1/10}} e^{-u}\, du = \mathrm{O}\big((\ln x)^{-1}\big)$$

erhält man aus (5.2)

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_4+\Gamma_5} \cdots = \frac{W(1)}{\sqrt{\pi}}\, x(\ln x)^{-1/2} + \mathrm{O}\big(x(\ln x)^{-3/2}\big).$$

Einsetzen in (4.3) und Ausrechnen von $W(1)$ führt zur Behauptung des Satzes.

Aufgaben

1. Sei $0 < r < 1, \quad 2 \le T \le x, \quad 0 < \varepsilon < 1, \ k \in \mathbb{N}$. Überlegen Sie sich – ohne auf Fehlerterme zu achten – welche zahlentheoretische Summe durch das Doppelintegral

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=r} dz\, \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{1+\varepsilon-iT}^{1+\varepsilon+iT} ds\, \prod_p \Big(1 + \frac{z}{p^s} + \frac{z}{p^{2s}} + \dots\Big)\, \frac{x^s}{s\, z^{k+1}}$$

berechnet werden kann. Mit welcher Funktion ist das Produkt $\prod\limits_p (\dots)$ verwandt?

2. Sei $(k, a) = 1$

$$f(n) \underset{\text{Df}}{=} \begin{cases} 0, & \text{falls} \quad \exists\, p\colon p | n \wedge p \not\equiv a(k), \\ 1 & \text{sonst}, \end{cases}$$
$$F(s) \underset{\text{Df}}{=} \sum_n f(n)\, n^s \qquad (\sigma > 1).$$

Dann gilt

$$F(s)^{\varphi(k)} = \zeta(s) \sum_{\chi \bmod k, \chi \neq \chi_0} \big(L(s,\chi)\big)^{\bar{\chi}(a)} \cdot G(s).$$

G ist holomorph für $\sigma > 1/2$. Was bedeutet $L(\ )^{\bar{\chi}(a)}$? Welche asymptotische Formel erhält man für $\sum\limits_{n \le x} f(n)$?

9. Kapitel. Riemannsche Vermutung und Primzahltests

Falls die Riemannsche Vermutung für $\zeta(s)$ richtig ist, dann gilt sie wegen

$$L(s,\chi_0) = \zeta(s)\prod_{p|k}\Big(1-\frac{1}{p^s}\Big) \quad (\chi_0 = \chi_0 \bmod k)$$

für alle L–Funktionen $L(s,\chi_0)$. Es spricht einiges dafür, daß die Riemannsche Annahme auch für die anderen L–Reihen erfüllt ist.

9.1. Verallgemeinerte oder Große Riemannsche Vermutung (GRV).
Sei $L(s,\chi)$ die L–Reihe zu einem Dirichlet–Charakter $\chi \bmod k$. Dann haben alle Nullstellen ρ von $L(s,\chi)$ im Streifen $0 \le \sigma \le 1$ den Realteil $1/2$.

Bislang ist kein Gegenbeispiel bekannt. Ein Beweis der Vermutung für $\zeta(s)$ muß nicht unbedingt einen Beweis der allgemeinen Form nach sich ziehen. Zum Beispiel ist es kein Problem, $\zeta(\sigma) \neq 0$ für $0 < \sigma < 1$ zu zeigen, während nach dem bisherigen Wissen reelle Nullstellen nahe bei $s = 1$ für L–Reihen mit reellen Charakteren nicht ausgeschlossen werden können (s. Kapitel 10, Satz von Siegel).

Ähnlich wie die gewöhnliche RV den Primzahlsatz in der Form

$$\pi(x) = \operatorname{Li} x + \mathrm{O}\big(x^{1/2}\ln x\big)$$

liefert, bedingt die GRV den Primzahlsatz in Progressionen

$$\pi(x,k,a) = \frac{1}{\varphi(k)}\operatorname{Li} x + \mathrm{O}\big(x^{1/2}\ln x\big) \quad \big(k \le x, (k,a) = 1\big).$$

Es gibt zahlreiche andere Konsequenzen der RV. Hier soll eine diskutiert werden, die sich auf die aktuelle Frage nach schnellen Primzahltests bezieht. Für eine ungerade Primzahl p bezeichne $n_2(p)$ das kleinste $a \in \{1,\dots,p-1\}$ mit $\left(\frac{a}{p}\right) = -1$ (**kleinster quadratischer Nicht–Rest mod** p). Man sieht sofort, daß $n_2(p)$ selbst Primzahl ist. Aus $\sum\limits_{a=1}^{p-1}\left(\frac{a}{p}\right) = 0$ ergibt sich $n_2(p) \le \frac{p-1}{2}$. Die Pólya–Vinogradovsche Ungleichung

$$\sum_{1\le a\le x}\left(\frac{a}{p}\right) = \mathrm{O}\big(p^{1/2}\ln p\big) \qquad (1 \le x < p)$$

läßt auf

$$n_2(p) = \mathrm{O}\big(p^{2^{-1}e^{-1/2}+\varepsilon} \quad \text{für jedes} \quad \varepsilon > 0$$

schließen. Der beste heutige Wert ist

$$n_2(p) = \mathrm{O}\big(p^{4^{-1}e^{-1/2}+\varepsilon}\big) \quad \text{(D. Burgess, 1957).}$$

Die GRV für den Charakter $\left(\frac{\cdot}{p}\right)$ verschärft dies zu

$$n_2(p) = \mathrm{O}(\ln^2 p).$$

Man entnimmt dies unmittelbar aus dem

9.2. Satz von Ankeny–Montgomery (1952).
Sei $\chi \neq \chi_0$ ein Charakter mod k. Es gelte für $L(s,\chi)$ die Riemannsche Vermutung. Dann existiert – mit einer absoluten, berechenbaren Konstanten C_1 – ein $n \leq C_1 \ln^2 k$ mit $\chi(n) \neq 0$ und $\chi(n) \neq 1$.

Hinweise zum Beweis.
Ähnlich wie bei $\zeta(s)$ läßt sich zeigen, daß $L(s,\chi)$ im horizontalen Streifen $T \leq \operatorname{Im}\rho \leq T+1 \quad (T \geq 0)$ höchstens $\mathrm{O}\big(\ln(k(T+2))\big)$ nichttriviale Nullstellen besitzt. Daher konvergiert für jedes $x \geq 1$ die Summe $\sum_\rho x^\rho \big(\rho(\rho+1)\big)^{-1}$ absolut (ρ durchläuft alle nichttrivialen Nullstellen von $L(s,\chi)$) und läßt sich mit der GRV durch $\mathrm{O}\big(x^{1/2}\ln k\big)$ abschätzen. Es besteht die explizite Formel

$$(1) \qquad \sum_{p\leq x}\Big(1-\frac{p}{x}\Big)\chi(p)\,\ln p = -\sum_\rho \frac{x^\rho}{\rho(\rho+1)} + \mathrm{O}\big(x^{1/2}\big) + \mathrm{O}(\ln k).$$

Sei $x = A\ln^2 k$ mit großem A und gelte $\chi(p) = 0$ oder $= 1$ für alle $p \leq x$. Es gibt höchstens $\mathrm{O}(\ln k)$ Primzahlen $p \leq k$ mit $p|k$. Die linke Seite in (1) wird daher mit dem Primzahlsatz zu $x/2 + \mathrm{o}(x) \geq x/3 \quad (x \geq x_0)$. Die rechte Seite ist nach dem Vorigen $= \mathrm{O}\big(x^{1/2}\ln k\big)$, also

$$x = \mathrm{O}\big(x^{1/2}\ln k\big) \quad \text{oder} \quad x = \mathrm{O}\big(\ln^2 k\big).$$

Für hinreichend großes A kann dies nicht stimmen, also die Behauptung.

Zu den in den letzten Jahrzehnten stark untersuchten Problemen gehört die Frage nach schnellen Primzahltests. Man nimmt an, daß es „polynomial“ rasche Tests gibt, das heißt, um ein n auf Primzahlcharakter zu testen, reichen $\leq C_2(\ln n)^{C_3}$ bit–Operationen. Der beste heute bekannte Test ist der von Adleman, Pomerance, Rumely (1983). Er kommt mit $\leq C_4(\ln n)^{C_5 \ln\ln\ln n}$ Schritten aus. (Der Test ist beschrieben im Buch „Prime Numbers“ von R. Crandall und C. Pomerance). Ein wie oben vermutet rascher und in seiner Struktur einfacher Test existiert, wenn die GRV vorausgesetzt wird.

Zur Vorbereitung werde an das Jacobi–Symbol erinnert.

9.3. Jacobi–Symbol (Carl Gustav J., 1804–1851).
Sei $m \not\equiv 0(2),\ m = p_1\cdots p_r \quad (p_1 \leq \cdots \leq p_r), \quad (a,m) = 1$. Dann wird

$$\Big(\frac{a}{m}\Big) \underset{\mathrm{Df}}{=} \Big(\frac{a}{p_1}\Big)\ldots\Big(\frac{a}{p_r}\Big) \quad \textbf{(Jacobi–Symbol)}$$

gesetzt. Es bestehen die Rechenregeln $(a,b \in \mathbb{Z}_m^*)$

(1) $\Big(\frac{a}{m}\Big) = \Big(\frac{b}{m}\Big)$, falls $a \equiv b(m)$,

(2) $\Big(\frac{ab}{m}\Big) = \Big(\frac{a}{m}\Big)\,\Big(\frac{b}{m}\Big)$,

(3) $\left(\frac{-1}{m}\right) = (-1)^{(m-1)/2}$,

(4) $\left(\frac{2}{m}\right) = (-1)^{(m^2-1)/8}$,

(5) $\left(\frac{n}{m}\right)\left(\frac{m}{n}\right) = (-1)^{(n-1)(m-1)/4}$ $(n, m \not\equiv 0(2), (n, m) = 1)$,

(6) $\left(\frac{a}{m}\right)$, erweitert durch $\left(\frac{a}{m}\right) = 0$ für $(a, m) > 1$, ist ein reellwertiger Charakter zum Modul m.

$(1), \ldots, (5)$ ergeben sich aus den Gesetzen für das Legendre–Symbol, (6) folgt aus (1) und (2).

Zur Berechnung von $\left(\frac{a}{m}\right)$ und damit auch des Legendre–Symbols $\left(\frac{a}{p}\right)$ ist insbesondere keine Faktorisierung von Zähler oder Nenner nötig. Man überzeugt sich leicht, daß zur Berechnung von $\left(\frac{a}{m}\right)$ $\mathrm{O}\big(\ln^2(|a| + m)\big)$ Rechenschritte ausreichen.

9.4. Solovay–Strassenscher Primzahltest. Für ein ungerades $n > 1$ sind äquivalent

(1) n ist prim,

(2) $\forall\, a \in \mathbb{Z}_n^*\colon a^{(n-1)/2} \equiv \left(\frac{a}{n}\right)\ (n)$.

Beweis. 1. (1) nach (2) ist gerade das Euler–Kriterium für $\left(\frac{a}{p}\right)$.

2. Es werde (2) vorausgesetzt.

2.1. Falls $\forall\, a \in \mathbb{Z}_n^*\colon a^{n-1} \equiv 1(n)$, ist n quadratfrei.

Beweis zu 2.1. Sei p ein Primteiler von n und p^t die höchste p–Potenz, die n teilt. g sei eine Primitivwurzel mod p^t. Nach dem Chinesischen Restsatz gibt es ein $a \in \mathbb{Z}_n^*$ mit

$$a \equiv g \bmod p^t, \quad a \equiv 1 \bmod n/p^t.$$

Nach Voraussetzung von 2.1. ist

$$a^{n-1} \equiv g^{n-1} \equiv 1 \bmod p^t.$$

Damit folgt

$$\mathrm{ord}_{p^t}(g) = \varphi(p^t) = p^{t-1}(p-1) \mid (n-1).$$

Im Fall $t > 1$ bewirkt dies $p|n-1$, was $p|n$ widerspricht.

2.2. Nach (2) kann 2.1. angewandt werden. n ist also quadratfrei, $n = p_1 \ldots p_r$ mit $2 < p_1 < \cdots < p_r$. Es werde $r \geq 2$ angenommen.

Man wähle ein a mit $\left(\frac{a}{p_1}\right) = 1$. $x \in \mathbb{Z}_n^*$ werden durch

$$x \equiv a(p_1), \qquad x \equiv 1(p_j) \qquad (2 \leq j \leq r)$$

bestimmt.

$$\left(\frac{x}{n}\right) = \left(\frac{x}{p_1}\right) \dots \left(\frac{x}{p_r}\right) = \left(\frac{a}{p_1}\right) \left(\frac{1}{p_2}\right) \dots \left(\frac{1}{p_r}\right) = -1.$$

Nach Voraussetzung ist $\left(\frac{x}{n}\right) \equiv x^{(n-1)/2}(n)$, also $x^{(n-1)/2} \equiv -1(n)$, insbesondere $x^{(n-1)/2} \equiv -1(p_2)$. Dies widerspricht

$$x^{(n-1)/2} \equiv 1^{(n-1)/2} \equiv 1(p_2).$$

Der Test taugt in dieser Form kaum für die Praxis, da (2) für alle $\varphi(n)$ Werte $a \in \mathbb{Z}_n^*$ nachgeprüft werden muß. Die Ankeny–Montgomerysche Konsequenz der GRV bewirkt jedoch, daß nur die $a \in \mathbb{Z}_n^*$ mit $a \le C_1(\ln n)^2$ beachtet werden müssen.

9.5. Satz. Sei $n \equiv 0(2)$, $n > 1$. Es gelte die Riemannsche Vermutung für die reellen Charaktere $\neq \chi_0$ zum Modul n. Mit der Konstanten C_1 aus Satz 9.2. sei

$$\forall\, a \in \mathbb{Z}_n^* \colon 1 \le a \le C_1 \ln^2 n \Rightarrow a^{(n-1)/2} \equiv \left(\frac{a}{n}\right) \bmod n$$

erfüllt. Dann ist n eine Primzahl.

Beweis. Es werde angenommen, daß n nicht prim ist. Durch

$$\chi \colon \mathbb{Z}_n^* \to \{1, -1\}, \quad a \to a^{(n-1/2}\left(\frac{a}{n}\right) \bmod n$$

(und $\chi(a) = 0$ für $(a, n) > 1$) wird ein reeller Charakter mod n definiert.
Nach Satz 9.4. kann χ nicht der Hauptcharakter sein (da n in diesem Fall prim wäre). Auf χ ist 9.2. anwendbar. Es gibt danach ein $a \in \mathbb{Z}_n^*$ mit $1 \le a \le C_1 \ln^2 n$ und $\chi(a) = -1$, d.h. $a^{(n-1)/2} \equiv -\left(\frac{a}{n}\right)(n)$. Aber dies widerspricht der Voraussetzung des Satzes.

Wegen der einfachen Berechenbarkeit der vorkommenden Objekte $\big((a, n) = 1$ nachprüfen, $a^{(n-a)/2}$, $\left(\frac{a}{n}\right), \bmod n\big)$ und der geringen Anzahl der zu testenden a erfüllt das Verfahren, sollte die RV richtig sein, in optimaler Weise die Wünsche, die man an einen Algorithmus stellt.

Aufgaben

1. Man zeige $n_2(p) < p^{e^{-1/2}+\varepsilon}$ für $p \ge p_0(\varepsilon) \qquad (\varepsilon > 0)$.

1) Jede der $\dfrac{p-1}{2}$ Zahlen $a \in \{1, \dots, p-1\}$ mit $\left(\frac{a}{p}\right) = -1$ ist durch ein $p' \in \big\{n_2(p), \dots, p-1\big\}$ teilbar.

2) $\dfrac{p-1}{2} \le p \ln(1/\alpha) + \mathrm{o}(p) \quad \big(\alpha = \ln n_2(p)/\ln p,\ \mathrm{o}(\ ) \quad \text{für} \quad p \to \infty\big)$.