

Übungen zur Vorlesung  
**Differentialgleichungen für Mikrosystemtechniker**  
WS 2006/07  
Blatt 6

Abgabe: Dienstag, 05.12.2006, vor der Vorlesung

**Aufgabe 11.** (Picard-Iteration)

(a) Gegeben seien die AWPe:

$$y' = x - y, \quad y(0) = 1 \quad \text{und} \quad y' = xy, \quad y(0) = 1.$$

Berechnen Sie die ersten 3 Picard-Iterierten, stellen Sie eine Vermutung für die  $m$ -te Picard-Iterierte auf und gehen Sie zum Grenzwert für  $m \rightarrow \infty$  über. Lösen Sie nun die AWPe exakt und vergleichen Sie beide Ergebnisse.

(b) Gegeben sei nun das AWP:

$$y' = y^2, \quad y(0) = 1.$$

Berechnen Sie die ersten 2 Picard-Iterierten und zeigen Sie, daß jede Picard-Iterierte auf ganz  $\mathbb{R}$  definiert ist. Lösen Sie das AWP nun exakt und bestimmen Sie den Definitionsbereich der Lösung. (Dies kann bei Grenzübergängen passieren...)

**Aufgabe 12.** (Modellierung mit DGLen)

Bestimmen Sie jeweils das AWP zu der gesuchten Größe:

(a) Ein Stein (50g) wird aus einem Fenster in Höhe 100m fallen gelassen. Die Bewegung wird durch Luftwiderstand gebremst, der proportional zur Geschwindigkeit ist. Gesucht ist die Höhe  $h(t)$ .

(b) In einen Tank mit 50l Frischwasser strömen 3l/min Salzwasser (100g/l Salzgehalt) ein und vermischen sich sofort. Ebenfalls fließen aus dem Tank 3l/min Flüssigkeit heraus. Gesucht ist die Salzmenge im Tank  $s(t)$ .

(c) Ein Würfel der Kantenlänge 1mm aus Salz (Dichte  $\rho$ ) wird in übersättigte Salzlösung getaucht, so daß Kristallwachstum einsetzt. Die Massenzunahme sei proportional zur Oberfläche und erhalte die Würfelform. Gesucht ist die Würfelmasse  $m(t)$ .

(d) In einem Wald verfaule 80 Prozent der abgestorbenen Biomasse pro Jahr; pro Quadratmeter und Jahr werde 7kg tote Biomasse produziert. Gesucht ist die Masse toter Biomasse pro Quadratmeter  $m(t)$  eines anfänglich völlig gesäuberten Waldes.