Mathematisches Institut
Abt. für Reine Mathematik
Prof. Dr. D. Wolke

05.12.2006

Übungen zur Vorlesung

Differentialgleichungen für Mikrosystemtechniker

WS 2006/07

Blatt 7

Abgabe: Dienstag, 12.12.2006, vor der Vorlesung

Aufgabe 13. (Fehler der Picard-Iteration)
Betrachten Sie das AWP: $y' = x^2 y =: f(x, y), \quad y(0) = 1$.
(a) Lösen Sie das AWP exakt.
(b) Die Picard-Iterierten y_i sind gegeben durch: $y_0 = y(0)$, $y_{k+1} = Ty_k$ mit $T\phi = 1 + \int_0^x f(t, \phi)\, dt$. Berechnen Sie y_k für $k = 0, \ldots, 3$.
(c) Zeigen Sie mit Schritt 6 aus dem Beweis der Vorlesung, daß T für $q = 1/8$ auf $[-1/2, 1/2]$ kontrahiert. Benutzen Sie als Lipschitzkonstante L eine obere Schranke der Ableitung $|\partial f/\partial y|$ auf dem Intervall.
(d) Wir definieren nun den Fehler F_k der k-ten Picard-Iterierten durch $F_k := \|y - y_k\|$. In der Vorlesung haben Sie die obere Schranke $F_k \leq \frac{q^k}{1-q}\|y_1 - y_0\| =: S_k$ bewiesen, berechnen Sie diese Schranken S_k für $k = 1, \ldots, 3$.
(e) Zeigen Sie nun, daß $F_k = (y - y_k)(1/2)$ gilt (d.h. daß die Maximumsnorm am Rand des Intervalls angenommen wird) und berechnen Sie den wirklichen Fehler F_k.

Aufgabe 14. (Satz von Picard-Lindelöf)
(a) Zeigen Sie Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung der AWPe:

$$y' = -\frac{x^2}{2 - y^2}, \quad y(-1) = \frac{1}{2} \text{ und } y' = 1 - y|y|, \quad y(0) = 0$$

mit Hilfe des Satzes aus der Vorlesung indem Sie alle Voraussetzungen explizit nachprüfen.
(b) Rechnen Sie nach, daß :

$$y_1 = x^2, \quad y_2 = \begin{cases} x^2 & , x \geq 0 \\ 0 & , x < 0 \end{cases}$$

Lösungen von $xy' = 2y$, $y(0) = 0$ sind und zeigen Sie, daß dies nicht dem Satz von Picard-Lindelöf widerspricht.
(c) Geben Sie explizit zwei nichttriviale Lösungen von $y' = y^{1/3}$, $y(0) = 0$ an und zeigen Sie, daß dies ebenfalls nicht dem Satz widerspricht. (Tip: Benutzen Sie Aufgabe A2 vom ersten Blatt als Vorlage.)