Mathematisches Institut
Abt. für Reine Mathematik
Prof. Dr. D. Wolke

12.12.2006

Übungen zur Vorlesung

Differentialgleichungen für Mikrosystemtechniker

WS 2006/07

Blatt 8

Abgabe: Dienstag, 19.12.2006, vor der Vorlesung

Aufgabe 15. (numerische Verfahren)

(a) Zu dem AWP

$$y' = y, \quad y(0) = 1$$

sei y die exakte Lösung, y_E^h die Näherung aus dem Eulerschen Verfahren und y_{RK}^h die Näherung aus dem Runge-Kutta-Verfahren jeweils zur Schrittweite h. Berechnen Sie numerisch y, y_E^1, $y_{RK}^1, y_E^{1/2}$, $y_{RK}^{1/2}$ in den Punkten 0, 0.5 und 1.

(b) In einfachen Fällen ist es möglich, ein AWP auch mit Hilfe des Eulerverfahrens exakt zu lösen. Tun Sie dies mit obigem AWP, indem Sie das Intervall $[0, t]$ in n gleichlange Teile der Länge h einteilen und eine allgemeine Formel für $y_E^h(t)$ herleiten. Bilden Sie dann den Grenzwert für $h \longrightarrow 0$. (Tip: Es gilt: $(1 + x/n)^n \longrightarrow \exp(x)$ für $n \longrightarrow \infty$.)

(c) (freiwillige Bearbeitung, ohne Bewertung)

Bestimmen Sie wie eben die Lösung des AWP:

$$y' = x - y, \quad y(0) = 1$$

indem Sie eine allgemeine Formel für $y_E^h(t)$ berechnen und dann zum Grenzwert übergehen. Vergleichen Sie mit der Lösung vom letzten Blatt. (Sie können hier sehen, wie unpraktikabel es schon bei einfachsten Gleichungen ist, die Lösung theoretisch mithilfe des Eulerverfahrens zu berechnen...) (Tip: Es gilt: $\sum_{k=0}^{n} q^k k = q \frac{d}{dq} \sum_{k=0}^{n} q^k = q \frac{d}{dq} \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.)

Aufgabe 16. (Schwingungsgleichung)

Ein Körper der Masse m pendele an einer Feder mit Federkonstante k.

(a) Zeigen Sie, daß die Auslenkung y durch die Gleichung $y'' = -ay$ beschrieben wird und bestimmen Sie a.

(b) Formen Sie die Gleichung äquivalent in ein System von Gleichungen erster Ordnung

$$x' = \begin{pmatrix} b & c \\ d & e \end{pmatrix} x$$

mit $x(t) \in \mathbb{R}^2$ um, bestimmen Sie b, c, d, e.

(c) Lösen Sie das System und damit die Ausgangsgleichung mit den Anfangswerten $y(0) = y_0$ und $y'(0) = 0$. Benutzen Sie den Ansatz: $x(t) = \xi \sin(\sqrt{a}t) + \eta \cos(\sqrt{a}t)$ mit zu bestimmenden $\xi, \eta \in \mathbb{R}^2$.

(d) Begründen Sie, daß dies die einzige Lösung das AWP ist.