

Übungen zur Vorlesung
Differentialgleichungen für Mikrosystemtechniker
WS 2006/07
Probeklausur

Bemerkung:

Zur Klausur am 12.04.2007 ist (nur) das Kurzmanuskript zur Vorlesung von Herrn Wolke zugelassen. Der Zeitrahmen beträgt zwei Stunden.

Aufgabe 1. (4 Punkte)

Gegeben sei das AWP:

$$y' = 2xy^2, \quad y(0) = y_0 \in \mathbb{R}.$$

- (a) Zeigen Sie Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen in einer Umgebung des Anfangswertes ohne die Lösungen zu berechnen.
(b) Lösen Sie das AWP und geben Sie das maximale Lösungsintervall in Abhängigkeit von y_0 an.

Aufgabe 2. (3 Punkte)

Berechnen Sie *alle* Lösungen der Gleichung:

$$(1 - x^2)y' - xy + x = 0, \quad x \in (-1, 1).$$

Aufgabe 3. (5 Punkte)

(a) Berechnen Sie die Picard-Iterierten y_0, \dots, y_3 des AWP:

$$y' = y^3, \quad y(1) = 1.$$

(b) Entscheiden Sie, ob die DGLen in einer Umgebung des Anfangswertes *eindeutig* lösbar sind und begründen Sie Ihre Antwort (ggf. durch ein Gegenbeispiel, wenn keine Eindeutigkeit vorliegt):

$$y' = \sqrt{y}, \quad y(0) = 0 \text{ für } x \geq 0, \quad \text{und} \quad y' = |y|, \quad y(0) = y_0 \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 4. (4 Punkte)

Gegeben sei die DGL:

$$y' = \begin{pmatrix} \frac{1}{x} & -1 \\ \frac{1}{x^2} & \frac{2}{x} \end{pmatrix} y.$$

- (a) Zeigen Sie, daß $y^1(x) = \begin{pmatrix} x^2 \\ -x \end{pmatrix}$ die DGL löst.
(b) Berechnen Sie ein Fundamentalsystem der DGL.

Aufgabe 5. (3 Punkte)

Gegeben sei die DGL

$$y' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} y.$$

Berechnen Sie ein Fundamentalsystem.

Aufgabe 6. (5 Punkte)

Gegeben sei das AWP:

$$y' = y + x^2, \quad y(0) = 0.$$

- (a) Berechnen Sie die Lösung mittels Variation der Konstanten.
(b) Berechnen Sie die Lösung durch einen Potenzreihenansatz für y .