Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Institut für Mathematik
Abteilung für Reine Mathematik
Prof. Dr. D. Wolke
Dipl.-Math. S. Feiler

1: Mo 16-18, SR 318	2: Di 11-13, SR 119	3: Di 11-13, SR 125
Christian Marquardt	Jonas Unger	Michael Gutmann
4: Di 11-13, SR 112	5: Di 16-18, SR 119	6: Di 16-18, SR 125
Stefan Fischer	Kai Siebold	Arno Pauly
7: Do 11-13, SR 127	8: Do 16-18, SR 318	9: Fr 11-13, HS II
Sarah Marzi	Bianca Straub	Elisabeth Wursthorn
10: Fr 11-13, SR 414	11: Fr 12-14, SR 218	Fragestunde: Do 09-11
Nicolas Ketterer	Christian Marquardt	Simon Feiler, SR 414

Übungen zur Vorlesung

Mathematik für Ingenieure und Informatiker I

Wintersemester 2007 / 2008

Übungsblatt Nummer 2

29. Oktober 2007

Abgabe am Montag, den 05.11.2007 vor der Vorlesung
Bitte die Lösungen mit Name, Matrikelnummer, Übungsnummer und Name des Tutors versehen.

Aufgabe 4

Skizzieren Sie die folgenden Teilmengen des $\mathbb{R}^2$!

a) $A := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : |2x| \leq y \right\}$

b) $B := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : |x+4| < |y| \right\}$

c) $C := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : |x| - |y| = \frac{3}{2} \right\}$

Aufgabe 5

Für $n \in \mathbb{N}_0$ und $\ell \in \mathbb{N}_0$ wird der Binomialkoeffizient $\binom{n}{\ell}$ („n über ℓ“) definiert als $\displaystyle\binom{n}{\ell} := \prod_{j=1}^{\ell} \frac{n-j+1}{j}$. Ist $n \geq \ell$, so folgt daraus $\displaystyle\binom{n}{\ell} = \frac{n!}{\ell! \cdot (n-\ell)!}$.

Zeigen Sie:

a) $\displaystyle\sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} = 2 \cdot \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

b) $\displaystyle\sum_{j=\ell}^{n-1} \binom{j}{\ell} = \binom{n}{\ell+1}$ für alle $\ell \in \mathbb{N}$ und für alle $n \in \mathbb{N}$.

Bemerkung: Eventuell benötigt man vollständige Induktion (siehe Aufgabe 6).
Wenn ja, welches ist der Induktionsparameter?

bitte wenden

Aufgabe 6

Ein Beweis durch Vollständige Induktion gleicht der Durchführung eines Domino-Days.

Um einen Domino-Day durchführen zu können, bedarf es drei grundlegender Handlungen.
1. Alle Steine müssen aufgebaut werden.
2. Es muss kontrolliert werden, ob ein Stein immer dann fällt, wenn sein Vorgänger fällt, das heißt, wenn sein Vorgänger ihn umwirft.
3. Der erste Stein muss umgeworfen werden.

Ein Induktionsbeweis verläuft genauso.
Zunächst müssen alle „Steine“ aufgebaut werden - es muss eine Behauptung aufgestellt werden, die für alle oder einen Teil der natürlichen (oder auch ganzen) Zahlen ($\mathcal{A} \subseteq \mathbb{N}$) gilt.
Daraufhin testet man, ob ein „Stein“ fällt, wenn sein Vorgänger fällt. Man nimmt also in der Induktionsvoraussetzung an, dass die Behauptung für eine feste Zahl (meistens n oder n_0) gilt. Unter dieser Annahme zeigt man nun im Induktionsschluss, dass die Behauptung für den Nachfolger ($n+1$ bzw. n_0+1) gilt.
Zuletzt muss man den ersten „Stein“ umwerfen, indem man die Behauptung im Induktionsanfang für das Minimum (das heißt für die kleinste Zahl in) der Menge $\mathcal{A}$ zeigt.

Da der Induktionsanfang gerne vergessen wird, setzt man ihn meist vor Induktionsvoraussetzung und Induktionsschluss.

Zeigen Sie nun die folgenden Formeln mit Hilfe des Beweisprinzips der Vollständigen Induktion! Wählen Sie jeweils das genannte $N \in \mathbb{N}_0$ selbst!

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \cdot k^2 = (-1)^n \cdot \frac{n \cdot (n+1)}{2}$ für alle $n \in \{m \in \mathbb{N}_0 : m \geq N\}$.

b) $\displaystyle\sum_{\ell=1}^{2\cdot n} \frac{(-1)^{\ell+1}}{\ell} = \sum_{j=n+1}^{2\cdot n} \frac{1}{j}$ für alle $n \in \{m \in \mathbb{N}_0 : m \geq N\}$.

c) $\displaystyle\prod_{n=1}^{k} \left(1 + x^{2^n}\right) = \frac{1 - x^{2^{k+1}}}{1-x}$ für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ und für alle $k \in \{m \in \mathbb{N}_0 : m \geq N\}$.

Bemerkung: Vorsicht! Nicht immer wird die Induktion nach n geführt.

Per Induktion kann auch definiert werden. Hierzu ein kleines Beispiel:

Seien $a_\ell \in \mathbb{R}$ für alle $\ell \in \mathbb{N}$ und sei $n \in \mathbb{N}$.
Dann ist $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ definiert durch $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k := a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n$.
Man kann $\sum\limits_{k=1}^{\ell} a_k$ für alle $\ell \in \mathbb{N}$ auch induktiv definieren:

„Induktionsanfang“: Sei $\sum\limits_{k=1}^{1} a_k := a_1$.

„Induktionsvoraussetzung“: Sei $n_0 \in \mathbb{N}$ und sei $\sum\limits_{k=1}^{n_0} a_k$ bereits definiert.

„Induktionsschluss“: Sei $\sum\limits_{k=1}^{n_0+1} a_k := a_{n_0+1} + \sum\limits_{k=1}^{n_0} a_k$.

Die Induktion kann auch bei 0 beginnen. Wie wäre dann $\sum\limits_{k=1}^{0} a_k$ zu definieren?
Genauso kann man auch das Produktzeichen $\prod$ oder die Fakultät ! induktiv definieren.