

Aufgabe 20

In dem Film „A beautiful mind“ von Ron Howard erzählt Russell Crowe alias John Nash sinngemäß folgende Geschichte:

„Stellen Sie sich zwei Radfahrer namens Matilda und Hans vor, die in zwei verschiedenen Orten gleichzeitig losfahren. Die Orte sind genau 30 Kilometer voneinander entfernt. Hans fährt mit einer Geschwindigkeit von 7,5 km/h, Matilda fährt mit einer Geschwindigkeit von 15 km/h. Beide fahren exakt aufeinander zu, die Straße zwischen beiden Orten macht keine Kurven.

Bevor Hans losfährt, sitzt auf seinem vorderen Fahrradreifen eine Fliege. Durch die plötzliche Bewegung aufgeschreckt fliegt diese auf, als Hans losfährt. Die Fliege fliegt mit einer Geschwindigkeit von 30 km/h genau in Richtung von Matildas Fahrrad. Dort angekommen ist sie irritiert, dass schon wieder ein Reifen auf sie zukommt, und dreht wieder um. Dabei berührt sie kurz Matildas Vorderreifen. Sie fliegt wieder mit 30 km/h in Richtung von Hans.

Und so geht es weiter, bis die arme Fliege zermatscht wird.“

- a) Wie weit ist die Fliege insgesamt geflogen?

Am Rande einer Holzfabrik befindet sich eine Klippe. Hinter einem drei Meter breiten Abgrund befindet sich eine Felsnadel von zwei Metern Durchmesser. Eines Tages entdeckt einer der Holzarbeiter am abgelegenen Ende dieser Felsnadel ein Edelweiß. Seine Schwester hat an diesem Tag Geburtstag und so beschließt er, der Schwester dieses Edelweiß zu schenken.

Nun überlegt er sich, wie er an das Edelweiß herankommt. Er schaut sich auf dem Fabrikgelände um und entdeckt einen Stapel von zwei Meter langen Holzbrettern. Alle Holzbretter sind gleich schwer und aus homogenen Material gebaut. Damit will er eine Brücke bauen. Er legt alle Holzbretter aufeinander an den Rand des Abgrundes. Dann schiebt er das oberste Brett so weit heraus, dass es gerade noch stabil auf den anderen liegenbleibt. Das Brett ragt nun einen Meter über den Abgrund. Dann schiebt er das zweite Brett ebenfalls so weit heraus, dass gerade keines der Bretter in den Abgrund fällt. Das erste Brett bewegt sich natürlich mit. (Wie weit hängt das zweite Brett nun über dem Abgrund?) Er macht weiter mit dem dritten Brett. Auch dieses schiebt er wieder genau so weit wie möglich über den Abgrund, ohne dass ein Brett abstürzt.

Damit macht er weiter, bis er schließlich den ganzen Abgrund mit einer Brücke überbaut hat.

- b) Wie viele Bretter braucht der Holzarbeiter?
c) Wie breit darf der Abgrund höchstens sein, um ihn mit dieser Methode überbrücken zu können, wenn man annimmt, dass der Vorrat an Holzbrettern beliebig groß ist?

Aufgabe 21

- a) In Aufgabe 7a) haben Sie eine erste Beziehung der FIBONACCI-Folge zum sogenannten „Goldenen Schnitt“ bewiesen. Der Zusammenhang geht sogar noch weiter.

Seien $a_0 := 0$, $a_1 := 1$ und $a_{n+2} := a_{n+1} + a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

$$\text{Sei } b : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q} \\ n \mapsto b_n := \frac{a_{n+1}}{a_n} \end{array} \right\}.$$

Berechnen Sie den Grenzwert der Folge $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$!

b) Sei $c : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{N} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ (n, x) \mapsto c_{n,x} := \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \cdot x^j \end{array} \right\}.$

Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Folge $(c_{n,x})_{n \in \mathbb{N}}$? Berechnen Sie gegebenenfalls den Grenzwert! Begründen Sie in den anderen Fällen die Divergenz!