Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Institut für Mathematik
Abteilung für Reine Mathematik
Prof. Dr. D. Wolke
Dipl.-Math. S. Feiler

1: Mo 16-18, SR 318	2: Di 11-13, SR 119	3: Di 11-13, SR 125
Christian Marquardt	Jonas Unger	Michael Gutmann
4: Di 11-13, SR 112	5: Di 16-18, SR 119	6: Di 16-18, SR 125
Stefan Fischer	Kai Siebold	Arno Pauly
7: Do 11-13, SR 127	8: Do 16-18, SR 414	9: Fr 11-13, HS II
Sarah Marzi	Bianca Straub	Elisabeth Wursthorn
10: Fr 11-13, SR 414	11: Fr 12-14, SR 218	Fragestunde: Do 09-11
Nicolas Ketterer	Christian Marquardt	Simon Feiler, SR 414

Übungen zur Vorlesung

Mathematik für Ingenieure und Informatiker I

Wintersemester 2007 / 2008

Übungsblatt Nummer 10

14. Januar 2008

Abgabe am Montag, den 21.01.2008 vor der Vorlesung
Bitte die Lösungen mit Name, Matrikelnummer, Übungsnummer und Name des Tutors versehen.

Aufgabe 28

a) Berechnen Sie $\displaystyle\int_{-1}^{2} \frac{x^3 - 2 \cdot x}{\left(x^4 - 4 \cdot x^2 + 5\right)^2} dx$!

b) Berechnen Sie eine Stammfunktion von $s : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & s\left(x\right) := \sin\left(x\right) \cdot x \end{array} \right\}$!

c) Berechnen Sie eine Stammfunktion des Tangens'!

d) Berechnen Sie $\displaystyle\int_{1}^{e^2} \sqrt{x} \cdot \ln\left(x\right) dx$!

Aufgabe 29

Seien $k, \ell \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit $k^2 \neq \ell^2$.
Geben Sie zu den folgenden Funktionen sämtliche Stammfunktionen an!

a) $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f\left(x\right) := \sin\left(k \cdot x\right) \cdot \cos\left(\ell \cdot x\right) \end{array} \right\}$

b) $\operatorname{ar\,sinh}$

Bemerkung: Beginnen Sie die Integration mit Hilfe von partieller Integration!
Zur Ableitung von $\operatorname{ar\,sinh}$ gibt Aufgabe 27 Aufschluss!
Es ist $x = \frac{1}{2} \cdot (2 \cdot x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

bitte wenden

Aufgabe 30
Berechnen Sie die folgenden reellen Zahlen!

a) $\displaystyle\int\limits_{0}^{1} e^{y^2} \cdot \big(4 \cdot y^3 + 2 \cdot y\big) dy$

b) $\displaystyle\int\limits_{-\sqrt[3]{\frac{\pi}{6}}}^{0} 9 \cdot k^2 \cdot \left(\cos\left(3 \cdot k^3 + \frac{\pi}{3}\right)\right)^2 dk$

Zusatzaufgabe (ZA) Diese Aufgabe bringt Ihnen bis zu vier Zusatzpunkte.
Berechnen Sie

$$\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{-2 \cdot x^2 + x - 2}{(x^2 - x - 2) \cdot (x^2 + 4)} dx!$$

Bemerkung: Finden Sie hierzu zunächst die Nullstellen x_1 und x_2 des Nenners ($x_1, x_2 \in \mathbb{R}$)!
Suchen Sie dann $A, B, C, D \in \mathbb{R}$, so dass für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{x_1, x_2\}$

$$\frac{0 \cdot x^3 - 2 \cdot x^2 + x - 2}{(x^2 - x - 2) \cdot (x^2 + 4)} = \frac{A}{x - x_1} + \frac{B}{x - x_2} + \frac{C \cdot x + D}{x^2 + 4}$$

ist! Hier könnte ein sogenannter Koeffizientenvergleich hilfreich sein. (Koeffizientenvergleich für ein Polynom zweiten Grades: Ist $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = \alpha \cdot x^2 + \beta \cdot x + \gamma$ für drei verschiedene $x \in \mathbb{R}$, so ist $a = \alpha$, $b = \beta$ und $c = \gamma$.)
$\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{1+x^2} \end{array}\right\}$ ist die Ableitung des arctan.

Partialbruchzerlegung (in $\mathbb{R}$)

(zu Ihrer Information)

Seien $p, q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Polynome mit Koeffizienten in $\mathbb{R}$ und $0 \leq \operatorname{grad}(p) < \operatorname{grad}(q)$.
Man betrachtet die Faktorisierung des Polynoms q über $\mathbb{R}$.
Seien also $a \in \mathbb{R}$, $r, s \in \mathbb{N}_0$, $x_k, y_\ell, z_\ell \in \mathbb{R}$ und $m_k, n_\ell \in \mathbb{N}$ für alle $k, \ell \in \mathbb{N}$ mit $k \leq r$ und $\ell \leq s$ derart, dass $x_{k_1} \neq x_{k_2}$, $(y_{\ell_1} \mid z_{\ell_1}) \neq (y_{\ell_2} \mid z_{\ell_2})$ für alle $k_1, k_2, \ell_1, \ell_2 \in \mathbb{N}$ mit $k_1, k_2 \leq r$, $\ell_1, \ell_2 \leq s$, $k_1 \neq k_2$ und $\ell_1 \neq \ell_2$ ist und für alle $x \in \mathbb{R}$ die Darstellung

$$q(x) = a \cdot \prod_{k=1}^{r} (x - x_k)^{m_k} \cdot \prod_{\ell=1}^{s} \left(x^2 + y_\ell \cdot x + z_\ell\right)^{n_\ell}$$

existiert, wobei $x^2 + y_\ell \cdot x + z_\ell \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und alle $\ell \in \mathbb{N}$ mit $\ell \leq s$ ist.
Dann ist die obere Darstellung von q gerade die Faktorisierung von q über $\mathbb{R}$.

Nun werden für alle $k, \ell \in \mathbb{N}$ mit $k \leq r$ und $\ell \leq s$ Konstanten $A_{k,\mu}, B_{\ell,\nu}, C_{\ell,\nu} \in \mathbb{R}$ für alle $\mu, \nu \in \mathbb{N}$ mit $\mu \leq m_k$ und $\nu \leq n_\ell$ gesucht, so dass für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{x_j \in \mathbb{R} : j \in \mathbb{N} \text{ und } j \leq r\}$

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \sum_{k=1}^{r} \sum_{\mu=1}^{m_k} \frac{A_{k,\mu}}{(x - x_k)^\mu} + \sum_{\ell=1}^{s} \sum_{\nu=1}^{n_\ell} \frac{B_{\ell,\nu} \cdot x + C_{\ell,\nu}}{(x^2 + y_\ell \cdot x + z_\ell)^\nu}$$

ist. Die rechte Seite der Gleichung heißt dann „Partialbruchzerlegung (in $\mathbb{R}$) der Funktion $\frac{p}{q}$“.