Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Institut für Mathematik
Abteilung für Reine Mathematik
Prof. Dr. D. Wolke
Dipl.-Math. S. Feiler

1: Mo 16-18, SR 318	2: Di 11-13, SR 119	3: Di 11-13, SR 125
Christian Marquardt	Jonas Unger	Michael Gutmann
4: Di 11-13, SR 112	5: Di 16-18, SR 119	6: Di 16-18, SR 125
Stefan Fischer	Kai Siebold	Arno Pauly
7: Do 11-13, SR 127	8: Do 16-18, SR 414	9: Fr 11-13, HS II
Sarah Marzi	Bianca Straub	Elisabeth Wursthorn
10: Fr 11-13, SR 414	11: Fr 12-14, SR 218	Fragestunde: Do 09-11
Nicolas Ketterer	Christian Marquardt	Simon Feiler, SR 414

Übungen zur Vorlesung

Mathematik für Ingenieure und Informatiker I

Wintersemester 2007 / 2008

Übungsblatt Nummer 12

28. Januar 2008

Abgabe am Montag, den 04.02.2008 vor der Vorlesung
Bitte die Lösungen mit Name, Matrikelnummer, Übungsnummer und Name des Tutors versehen.

Seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $N \in \mathbb{N}_0$, $f : I \to \mathbb{R}$ eine (mindestens) $N+1$-mal auf I stetig differenzierbare Funktion und $a \in I$.
In der Vorlesung wurde gezeigt, dass für alle $x \in I$ die Formel

$$f(x) \;=\; \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \cdot (x-a)^n + \frac{1}{N!} \cdot \int_a^x f^{(N+1)}(t) \cdot (x-t)^N dt$$

gilt (das ist die Formel zum N-ten Taylorpolynom).
Mithilfe des Mittelwertsatzes der Integralrechnung (Kurzskript zur Vorlesung, Satz 4.1.5) kann man das „Restglied“ in einer anderen Weise darstellen.
Es gibt nämlich für alle $x \in I \setminus \{a\}$ ein $\xi \in I$ mit $\min\{a,x\} < \xi < \max\{a,x\}$ (das heißt, ξ liegt zwischen a und x) und

$$\begin{aligned}\int_a^x f^{(N+1)}(t) \cdot (x-t)^N dt \;&=\; f^{(N+1)}(\xi) \cdot \int_a^x (x-t)^N dt \;=\; f^{(N+1)}(\xi) \cdot \left[\frac{-1}{N+1} \cdot (x-t)^{N+1}\right]_{t=a}^{x} \\ &=\; \frac{f^{(N+1)}(\xi)}{N+1} \cdot \left(\underbrace{-(x-x)^{N+1}}_{=\,0} + (x-a)^{N+1}\right).\end{aligned}$$

Also gibt es für alle $x \in I \setminus \{a\}$ ein $\xi \in I$ mit $\min\{a,x\} < \xi < \max\{a,x\}$ und

$$f(x) \;=\; \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \cdot (x-a)^n + \frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!} \cdot (x-a)^{N+1}.$$

Diese Darstellung des Restgliedes wird Lagrange'sche Form des Restgliedes genannt.

bitte wenden

Aufgabe 34
Berechnen Sie einen Näherungswert für $\sin\left(\frac{1}{4}\right)$ mit einem maximalen Fehler von einem Milliardstel!

$$\text{Finden Sie also ein } a \in \mathbb{R} \text{ mit } \left|\sin\left(\tfrac{1}{4}\right) - a\right| \leq 10^{-9}!$$

Verwenden Sie hierzu die TAYLOR-Entwicklung des sin!
Bemerkung: Beim wievielten Glied der Entwicklung dürfen Sie abbrechen? Warum?

Aufgabe 35

a) Entwickeln Sie sinh und cosh in eine Potenzreihe um 0!

b) Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Potenzreihe $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} k^2 \cdot (x-1)^k$?

Für welche $x \in \mathbb{R}$ divergiert die Reihe?

c) Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Potenzreihe $\displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} j^j \cdot \left(x + \sqrt{2}\right)^j$?

Für welche $x \in \mathbb{R}$ divergiert die Reihe?

Aufgabe 36

a) Stellen Sie die TAYLORpolynome $T_5(\,\cdot\,,0)$, $T_6(\,\cdot\,,0)$ und $T_7(\,\cdot\,,0)$ zum Tangens auf!

Welcher Vorteil ergibt sich in der Abschätzung von $|\tan(x) - T_5(x,0)|$ für $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$?

Bemerkung: Eventuell hilft es, zunächst für alle $n \in \mathbb{N}$ die Ableitung der n-ten Potenz des Tangens' in der Tangens-Darstellung zu ermitteln.

b) Entwickeln Sie arctan in eine TAYLORreihe um 0!

Wie groß ist der Konvergenzradius dieser Reihe?

Bemerkung: Kennen Sie die Reihendarstellung der Ableitung des arctan?