Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Mathematisches Institut
Abteilung für Reine Mathematik
Prof. Dr. D. Wolke
Dipl.-Math. S. Feiler

I: Mo, 14-16 Uhr, SR 414	II: Di, 11-13 Uhr, SR 218
Nicolas Ketterer, Math. Inst.	Katja Reiser, Math. Inst.
III: Di, 16-18 Uhr, SR 01-009/13	IV: Di, 16-18 Uhr, SR 00-014
Julia Riegger, Gebäude 101	Jonas Unger, Gebäude 078
V: Mi, 14-16 Uhr, SR 00-010/14	Fragestunde: Do, ab 11 Uhr
Elisabeth Wursthorn, Geb. 101	Simon Feiler, Hörsaal II

Übungen zur Vorlesung

Mathematik für Studierende des Ingenieurwesens II

Sommersemester 2008

Übungsblatt Nummer 16

06. Mai 2008

Abgabe am Dienstag, den 20.05.2008 vor der Vorlesung
Bitte die Lösungen mit Name, Matrikelnummer, Übungsnummer und Name des Tutors versehen.

Aufgabe 46 4 Punkte

a) Berechnen Sie die Determinante von $\mathcal{M} := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 & 0 & -1 \\ 3 & 7 & 2 & -2 & -1 & 3 \\ 8 & 2 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & 3 & 0 & 5 \\ 5 & 1 & -2 & 0 & 3 & 3 \\ -2 & 2 & 0 & 3 & 0 & -4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{6\times 6}$!

b) Berechnen Sie die Determinante von $\mathcal{N} := \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -4 & 6 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$.

Bemerkung: Wenn Sie geschickt vorgehen, ersparen Sie sich Einiges an Rechenarbeit.

Aufgabe 47 5,5 Punkte

Seien $\vec{a} := \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{b} := \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{c} := \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -6 \end{pmatrix}$, $\vec{r} := \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{s} := \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{t} := \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Seien $\mathbb{B} := \left\{\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}\right\}$ und $\mathbb{S} := \left\{\vec{r}; \vec{s}; \vec{t}\right\}$. $\mathbb{B}$ und $\mathbb{S}$ sind Basen des $\mathbb{R}^3$.

Sei nun $\mathcal{M}_{\mathbb{BS}} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ die Basiswechsel-Matrix von $\mathbb{B}$ nach $\mathbb{S}$.

a) Geben Sie $\mathcal{M}_{\mathbb{BS}}$ an!

Bemerkung: Welche Vektoren müssen Sie als Linearkombination welcher Vektoren darstellen?

b) Bestimmen Sie die Eigenwerte von $\mathcal{M}_{\mathbb{BS}}$ und die Eigenvektoren von $\mathcal{M}_{\mathbb{BS}}$!

bitte wenden

Die Adjunkte einer Matrix

Seien $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, $a_{jk} \in K$ für alle $j \in \mathbb{N}$ und $k \in \mathbb{N}$ mit $j \leq n$ und $k \leq n$ und

$$\mathcal{C} := (a_{jk})_{\substack{j=1,\ldots,n \\ k=1,\ldots,n}}.$$

Mit anderen Worten: $\mathcal{C}$ ist eine $n \times n$-Matrix mit den Einträgen $a_{jk} \in K$.

Für alle $s \in \mathbb{N}$ und $t \in \mathbb{N}$ mit $s \leq n$ und $t \leq n$ sei $\mathcal{C}_{st} := (a_{jk})_{\substack{j=1,\ldots,n \\ k=1,\ldots,n \\ j \neq s, k \neq t}} \in K^{(n-1)\times(n-1)}$ die Matrix, die aus $\mathcal{C}$ durch Streichen der s-ten Zeile und der t-ten Spalte hervorgeht.
Nun sei $\tilde{a}_{st} := (-1)^{s+t} \cdot \det \mathcal{C}_{st}$ für alle $s \in \mathbb{N}$ und $t \in \mathbb{N}$ mit $s \leq n$ und $t \leq n$.

Die Matrix $\operatorname{adj} \mathcal{C} := \left((\tilde{a}_{st})_{\substack{s=1,\ldots,n \\ t=1,\ldots,n}} \right)^T \in K^{n \times n}$ mit den Einträgen $\tilde{a}_{st}$ ($s \in \mathbb{N}$ und $t \in \mathbb{N}$ mit $s \leq n$ und $t \leq n$) heißt „Adjunkte von $\mathcal{C}$" oder „komplementäre Matrix zu $\mathcal{C}$".
VORSICHT: Nicht zu verwechseln mit der „Adjungierten" $\mathcal{C}^T$ von $\mathcal{C}$.
Für alle $s \in \mathbb{N}$ und $t \in \mathbb{N}$ mit $s \leq n$ und $t \leq n$ heißt die Zahl $|\tilde{a}_{st}| = \det \mathcal{C}_{st}$ „(s,t)-ter Minor der Matrix $\mathcal{C}$".
Zur Bildung von $\operatorname{adj} \mathcal{C}$ schreibt man also die Minoren von $\mathcal{C}$ (in der natürlichen Reihenfolge) mit alternierenden Vorzeichen in eine Matrix und transponiert diese.

Die Adjunkte einer Matrix hat große Ähnlichkeit mit der „Inversen" der Matrix. Es gilt stets ($\mathcal{C}$ muss nicht notwendig invertierbar sein, $\mathcal{E}_n$ bezeichnet die n-te Einheitsmatrix)

$$\operatorname{adj} \mathcal{C} \cdot \mathcal{C} \;=\; \det \mathcal{C} \cdot \mathcal{E}_n \;=\; \mathcal{C} \cdot \operatorname{adj} \mathcal{C}.$$

Aufgabe 48 2,5 Punkte

Sei $\mathcal{A} := \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

Stellen Sie fest, ob $\mathcal{A}$ invertierbar ist!
Berechnen Sie die Adjunkte $\operatorname{adj} \mathcal{A}$ von $\mathcal{A}$!
Geben Sie im Falle der Invertierbarkeit von $\mathcal{A}$ die Inverse $\mathcal{A}^{-1}$ von $\mathcal{A}$ an!

Zusatzaufgabe (Zum Üben) 0 Punkte

Sei $\mathcal{B} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 5 & 3 \\ -2 & -4 & -1 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$.

Stellen Sie fest, ob $\mathcal{B}$ invertierbar ist!
Berechnen Sie die Adjunkte $\operatorname{adj} \mathcal{B}$ von $\mathcal{B}$!
Geben Sie im Falle der Invertierbarkeit von $\mathcal{B}$ die Inverse $\mathcal{B}^{-1}$ von $\mathcal{B}$ an!