Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Mathematisches Institut
Abteilung für Reine Mathematik
Prof. Dr. D. Wolke
Dipl.-Math. S. Feiler

I: Mo, 14-16 Uhr, SR 414	II: Di, 11-13 Uhr, SR 218
Nicolas Ketterer, Math. Inst.	Katja Reiser, Math. Inst.
III: Di, 16-18 Uhr, SR 01-009/13	IV: Di, 16-18 Uhr, SR 00-014
Julia Riegger, Gebäude 101	Jonas Unger, Gebäude 078
V: Mi, 14-16 Uhr, SR 00-010/14	Fragestunde: Do, 16-18 Uhr
Elisabeth Wursthorn, Geb. 101	Simon Feiler, SR 00-014 (078)

Übungen zur Vorlesung

Mathematik für Studierende des Ingenieurwesens II

Sommersemester 2008

Übungsblatt Nummer 24

08. Juli 2008

Abgabe am Dienstag, den 15.07.2008 vor der Vorlesung
Bitte die Lösungen mit Name, Matrikelnummer, Übungsnummer und Name des Tutors versehen.

Aufgabe 70

Seien $\vec{f}:\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2\\ \begin{pmatrix} r\\ \varphi\end{pmatrix} & \mapsto & \vec{f}\left(\begin{pmatrix} r\\ \varphi\end{pmatrix}\right):=\begin{pmatrix} r\cdot\cos(\varphi)\\ r\cdot\sin(\varphi)\end{pmatrix}\end{array}\right\}$, $\vec{\alpha}:\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2\\ t & \mapsto & \vec{\alpha}(t):=\begin{pmatrix}\sin(t)\\ t\end{pmatrix}\end{array}\right\}$,

$\vec{\beta}:\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2\\ t & \mapsto & \vec{\beta}(t):=\begin{pmatrix} t\\ \frac{\pi}{2}\cdot t\end{pmatrix}\end{array}\right\}$, $\vec{g}:\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2\\ \begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix} & \mapsto & \vec{g}\left(\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}\right):=\begin{pmatrix} 3\cdot x^2\cdot y^2\\ 2\cdot x^3\cdot y\end{pmatrix}\end{array}\right\}$,

$\vec{\gamma}:\left\{\begin{array}{ccc}\{w\in\mathbb{R}|\, w\geq 0\} & \to & \mathbb{R}^2\\ t & \mapsto & \vec{\gamma}(t):=\begin{pmatrix} t\\ \sqrt{t}\end{pmatrix}\end{array}\right\}$ und $\vec{\delta}:\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2\\ t & \mapsto & \vec{\delta}(t):=\begin{pmatrix} t\\ t^2\end{pmatrix}\end{array}\right\}$.

a) Berechnen Sie $\displaystyle\int_{\left(\vec{\alpha},\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]\right)} \vec{f}(\vec{z})\cdot \mathrm{d}\vec{z}$!

b) Berechnen Sie $\displaystyle\int_{\left(\vec{\beta},[-1;1]\right)} \vec{f}(\vec{z})\cdot \mathrm{d}\vec{z}$!

c) Prüfen Sie, ob $\vec{f}$ ein Potentialfeld ist, geben Sie gegebenenfalls ein Potential von $\vec{f}$ an und zeigen Sie, dass es sich tatsächlich um ein Potential von $\vec{f}$ handelt!

d) Berechnen Sie $\displaystyle\int_{\left(\vec{\gamma},[0;1]\right)} \vec{g}(\vec{z})\cdot \mathrm{d}\vec{z}$!

e) Berechnen Sie $\displaystyle\int_{\left(\vec{\delta},[0;1]\right)} \vec{g}(\vec{z})\cdot \mathrm{d}\vec{z}$!

f) Prüfen Sie, ob $\vec{g}$ ein Potentialfeld ist, geben Sie gegebenenfalls ein Potential von $\vec{g}$ an und zeigen Sie, dass es sich tatsächlich um ein Potential von $\vec{g}$ handelt!

bitte wenden

Aufgabe 71

Seien $\vec{V} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \mapsto & \vec{V}\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) := \begin{pmatrix} 2 \cdot x \cdot \sin(y) + e^{z^2} \\ x^2 \cdot \cos(y) \\ 2 \cdot x \cdot z \cdot e^{z^2} \end{pmatrix} \end{array} \right\}$, $\mathbb{R}_0^+ := \{w \in \mathbb{R} | \, w \geq 0\}$,

$\vec{\gamma}_{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_0^+ & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ t & \mapsto & \vec{\gamma}_{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}(t) := \begin{pmatrix} t \cdot x \\ t \cdot y \\ \sqrt{t} \cdot z \end{pmatrix} \end{array} \right\}$ und $K_{x,y,z} := \left(\vec{\gamma}_{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}; [0; 1]\right)$ für alle $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

a) Bestimmen Sie für alle $(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3$ die Jacobi–Matrix $\mathcal{J}_{\vec{V}}(x, y, z)$ von $\vec{V}$ an der Stelle $(x, y, z)^T$ und die Rotation $\left(\operatorname{rot}\left(\vec{V}\right)\right)(x, y, z)$ von $\vec{V}$ an der Stelle $(x, y, z)^T$!

b) Bestimmen Sie $\displaystyle\int_{K_{x,y,z}} \vec{V}(\vec{w}) \cdot d\vec{w}$ für alle $(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3$ mit $y \neq 0 \neq z$!

c) $\vec{V}$ ist ein Gradientenfeld.

Geben Sie ein Potential von $\vec{V}$ an und zeigen Sie, dass es sich tatsächlich um ein Potential von $\vec{V}$ handelt!

Berechnen Sie das Kurvenintegral von $\vec{V}$ längs einer Kurve K, die die Punkte $\vec{a} := \left(\sqrt[4]{2}; \frac{\pi}{4}; \frac{\sqrt{\ln(8)}}{2}\right)^T$ und $\vec{b} := \left(2; \pi; \sqrt{\ln(3)}\right)^T$ in Richtung von $\vec{a}$ nach $\vec{b}$ verbindet!

Aufgabe 72

Seien $\vec{h} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto & h\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) := \begin{pmatrix} -x^2 - y^2 \\ x^3 + 3 \cdot x \cdot y^2 \end{pmatrix} \end{array} \right\}$ und $K \subseteq \mathbb{R}^2$ der Kreis vom Radius 1 um $(1; 2)^T \in \mathbb{R}^2$.

a) Berechnen Sie $\displaystyle\int_{\partial K} h(\vec{w}) \cdot d\vec{w}$ direkt!

Bemerkung: Zur Berechnung von $\displaystyle\int \sin^2(t) \cdot \cos^2(t)\, dt$ empfiehlt sich partielle Integration mit $u(t) = \sin(t)$.

b) Berechnen Sie $\displaystyle\int_{\partial K} h(\vec{w}) \cdot d\vec{w}$ unter Verwendung des Satzes von Green in der Ebene!

Bemerkung: Verwenden Sie verschobene Polarkoordinaten!