Irrationalzahlen

Freiburger Mathematik–Tage vom 30.09.–01.10.2005

Dieter Wolke

1. Die **rationalen Zahlen**, das heißt die gekürzten Brüche

$$r = \frac{a}{n} \quad \text{mit} \quad n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}, \quad a \in \mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 1, \ldots\} \quad \text{und } a \text{ und } n \text{ teilerfremd,}$$

können als bekannt vorausgesetzt werden. Für das praktische Rechnen reichen sie völlig aus. Sie liegen dicht auf der Zahlengeraden, das heißt jedes noch so kleine Intervall enthält rationale Zahlen. Begründung: Mit $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{Q}$ = Menge der rationalen Zahlen, $\alpha_1 < \alpha_2$, gehört auch das arithmetische Mittel $\frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2)$ zu $\mathbb{Q}$. Oder: Die Zehntel, Hundertstel, Tausendstel, usw. besetzen jede noch so kurze Strecke.
Man könnte hieraus den voreiligen Schluss ziehen, dass für weitere Zahlen kein Platz mehr da ist. So dachten im Prinzip die alten Griechen bis etwa zu den Entdeckungen des **Pythagoras** und seiner Schüler (ca. 550 vor unserer Zeitrechnung). „Alles ist Zahl“ war die Lehrmeinung. Zu verstehen im Sinn: Alle bei geometrischen Figuren auftretenden Streckenverhältnisse lassen sich durch rationale Zahlen beschreiben. Es wirkte wie ein Schock, als man feststellte, dass hier Abstriche gemacht werden müssen. Schon bei einer so einfachen Figur wie dem Quadrat der Seitenlänge Eins. Nach dem Satz des Pythagoras gilt für d, die Länge der Diagonalen, $d^2 = 1^2 + 1^2 = 2$, $d = \sqrt{2}$. Dass diese Zahl nicht zu $\mathbb{Q}$ gehört, irrational ist, wird indirekt bewiesen, für viele das erste Beispiel eines indirekten Beweises.
Wir nehmen an, es sei $d \in \mathbb{Q}$, also $d = \frac{a}{n}$ mit a, $n \in \mathbb{N}$, a und n teilerfremd. Insbesondere können nicht beide Zahlen a und n gerade, d.h. durch 2 teilbar sein. Mit n multipliziert und quadriert, folgt aus der Annahme

$$(1) \qquad 2n^2 = a^2.$$

Die linke Seite ist gerade, also auch die rechte. Dann muss a gerade sein (denn a ungerade, $a = 2b + 1$, ergibt $a^2 = 4b^2 + 4b + 1$, eine ungerade Zahl). $a = 2a'$ mit $a' \in \mathbb{N}$. In (1) eingesetzt, ergibt das

$$2n^2 = 4a'^2, \quad n^2 = 2a'^2.$$

Der gleiche Schluss wie oben führt zu: n ist gerade. Damit sind a und n beide gerade, im Widerspruch zur Forderung, dass a und n teilerfremd sind. Der Widerspruch kann nur dadurch aufgelöst werden, dass wir die Annahme $d = \sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ fallen lassen. Damit steht $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ fest.
Der Beweis kann auf folgenden Fall verallgemeinert werden: Seien $k \geq 2$ und n natürliche Zahlen, n nicht k–te Potenz einer natürlichen Zahl, dann ist $\sqrt[k]{n}$ irrational. Zur genauen Durchführung ist der Satz von der eindeutigen Primfaktorzerlegung (z.B. $12 = 2^2 \cdot 3$, $35 = 5 \cdot 7$) natürlicher Zahlen nötig. Diese Tatsache wird zwar seit dem Beginn der Mathematik ständig benutzt, wurde aber erst 1801 durch Carl Friedrich

Gauß streng bewiesen.

2. Ohne genau zu wissen, wie sie exakt eingeführt werden, wollen wir von nun an in $\mathbb{R}$, der **Menge der reellen Zahlen** rechnen. $\mathbb{R}$ zerfällt nach 1. in zwei nichtleere Teile, in $\mathbb{Q}$ und die Menge der Irrationalzahlen. Bei konkreten Zahlen wie der Kreiszahl $\pi = 3{,}141592\ldots$ oder der Basis des natürlichen Logarithmus $e = 27182818284590\ldots$ (e kann auch als Urheberin der Exponentialfunktion $\exp(x) = e^x$ mit der Eigenschaft $(e^x)' = e^x$ definiert werden) möchte man gern wissen, ob sie rational sind oder nicht. Rationalität würde den Umgang mit ihnen sehr vereinfachen.
Bei e ist die Irrationalität relativ leicht einzusehen. e kann definiert werden als Wert einer unendlichen Reihe.

$$e = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!}. \tag{2.1}$$

Für $n \in \mathbb{N}$ wird die **Fakultätsfunktion** $n!$ durch $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$ definiert. $0!$ wird als 1 gesetzt. Da an der Schule kaum mit **unendlichen Reihen** gearbeitet wird, zuvor ein paar Worte hierzu.
Es sei eine Folge $a_0, a_1, a_2, \ldots$ reeller Zahlen gegeben, die Summanden der Reihe. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ wird die endliche Summe

$$s_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_{n-1} + a_n = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu$$

als n–te Teil– oder **Partialsumme** bezeichnet. Man sagt, dass die unendliche Summe oder **Reihe konvergiert** und den Wert oder Grenzwert s hat, wenn die s_n für $n \to \infty$ gegen s streben. Die Tatsache der Konvergenz kann auch so charakterisiert werden: Die **Restsummen**

$$s_{n,n+k} = \sum_{\nu=n+1}^{n+k} a_\nu = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+k}$$

werden beliebig klein, wenn n gegen unendlich geht, ganz egal wie groß man k wählt.
Ebensogut ist: Die **Reihenreste**

$$r_n = \sum_{\nu=n+1}^{\infty} a_\nu = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + ,$$

selbst unendliche Reihen, konvergieren. Ihre Werte gehen gegen Null für $n \to \infty$.
Wir wollen für die e–Reihe die Reste abschätzen. Wegen $\frac{1}{n!} > 0$ sind alle endlichen und unendlichen Restsummen positiv

$$0 < s_{n,n+k} < r_n \quad \text{für alle} \quad n \quad \text{und} \quad k$$
$$s_{n,n+k} = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \cdots + \frac{1}{(n+k)!}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{(n+1)!}\left(1+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{(n+2)(n+3)}+\dots\right)\\
&< \frac{1}{(n+1)!}\left(1+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\frac{1}{(n+2)^3}+\dots+\frac{1}{(n+2)^k}\right)\\
&= \frac{1}{(n+1)!}\,\frac{1-\left(\frac{1}{n+2}\right)^{k+1}}{1-\frac{1}{n+2}} \quad \text{nach der geometrischen Reihenformel.}
\end{aligned}
$$

Erneut wird verschenkt

$$s_{n,n+k} < \frac{1}{(n+1)!}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{n+2}} = \frac{1}{(n+1)!}\,\frac{n+2}{n+1}.$$

Alle Ungleichungen bleiben erhalten für $k \to \infty$, also stimmt es auch für r_n. Wir haben damit gezeigt

(2.2)
$$
\begin{aligned}
&e = s_n + r_n \quad \text{mit}\\
&s_n = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{1}{\nu!} \quad \text{und} \quad 0 < r_n < \frac{n+2}{(n+1)(n+1)!}, \quad n \in \mathbb{N}.
\end{aligned}
$$

Die rasche Konvergenz der e–Reihe, das heißt das rasche Klein–Werden der r_n und die zahlentheoretisch günstige Gestalt der Summanden, erlaubt einen indirekten Irrationalitätsbeweis für e.

Satz 1. (Erste Beweise durch Leonard Euler und Johann Heinrich Lambert).
Die Zahl e ist irrational.
Zum Beweis nehmen wir an, e sei rational,

$$e = \frac{a}{n} \quad \text{mit} \quad n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 2, \quad a \in \mathbb{N}.$$

Die n–te Partialsumme $s_n = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\dots+\frac{1}{n!}$ ist rational und kann durch Multiplikation mit $n!$ ganz gemacht werden. Damit folgt

(2.3)
$$n!(e - s_n) = \frac{a}{n}n! - n!s_n \quad \text{ist eine ganze Zahl.}$$

Andererseits ist

(2.4)
$$n!(e - s_n) = n!\,r_n.$$

Aus (2.2) ergibt sich

$$0 < n!r_n < \frac{n!}{(n+1)!}\frac{n+2}{n+1} = \frac{n+2}{(n+1)^2}.$$

Wegen

$$\frac{n+2}{(n+1)^2} = \frac{n+2}{n^2+2n+1} = \frac{n+2}{n+2+(n^2+n-1)} \leq \frac{n+2}{n+2+n^2} < 1$$

erhält man daraus

$$0 < n!\, r_n < 1. \tag{2.5}$$

Nach (2.4) und (2.3) sollte dies eine ganze Zahl sein, aber zwischen 0 und 1 gibt es keine. Widerspruch! Die Annahme, e sei rational, war also falsch.
Der Beweis funktioniert unter anderem, weil die e–Reihe so gut konvergiert, d.h. die Reihenreste sehr zügig gegen Null gehen. Die Multiplikation von r_n mit der für große n gewaltigen Zahl $n!$ führt zu einem Wert zwischen 0 und 1, der nicht ganzzahlig sein kann.
Man fragt sich, ob es für die bekanntere Zahl π ähnlich gemacht werden kann. Für π bzw. eng damit verwandte Zahlen ist eine Fülle von Reihendarstellungen bekannt, z.B.

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{4} &= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \quad \text{(Leibniz' Reihe)},\\ \frac{\pi^2}{6} &= 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots \quad \text{(Eulers Reihe)}. \end{aligned}$$

Alle bisher bekannte Reihen für π kranken daran, dass sie nicht rasch genug konvergieren, und somit ein Irrationalitätsbeweis im obigen Stil nicht gelingt. Dass π irrational ist, wurde 1766 durch **Johann Heinrich Lambert** bewiesen. Diese und alle weiteren heute bekannten Herleitungen erfordern wesentlich mehr an Ideen und Hilfsmitteln, und würden den Umfang unseres Kurses sprengen.

3. Die dritte hier behandelte Methode zur Gewinnung von Irrationalzahlen beruht auf der **Dezimaldarstellung der reellen Zahlen**. Wieder muss auf eine strenge Begründung verzichtet werden.
Jedes $x \in \mathbb{R}$ kann geschrieben werden als

$$\text{ganze Zahl} + \text{gebrochener Teil} \;\; \alpha \;\; \text{mit} \quad 0 \le \alpha < 1.$$

α hat die Dezimaldarstellung

$$\alpha = 0, z_1 z_2 z_3 \dots \quad \text{mit den Ziffern} \quad z_1, z_2, \dots \in \{0, 1, \dots, 9\}.$$

Der unendliche Dezimalbruch ist eine Abkürzung für die Reihe

$$\frac{z_1}{10} + \frac{z_2}{10^2} + \frac{z_3}{10^3} + \dots = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{z_\nu}{10^\nu}.$$

All diese Summen konvergieren, denn die Restsummen werden rasch klein

$$\begin{aligned} 0 \le s_{n,n+k} &= \frac{z_{n+1}}{10^{n+1}} + \dots + \frac{z_{n+k}}{10^{n+k}}\\ &\le \frac{1}{10^{n+1}} \Big(9 + \frac{9}{10} + \dots + \frac{9}{10^{k-1}} \Big)\\ &\le \frac{9}{10^{n+1}} \Big(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \dots \Big) = \frac{9}{10^{n+1}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{1}{10^n}. \end{aligned}$$

Die einzige Vorsichtsmaßnahme, die man beachten muss: Die Ziffernfolge darf nicht ab einer Stelle konstant 9 sein. Denn es ist

$$0,\, z_1 \dots z_m \bar{9} = 0, z_1 \dots z_{m+1}(z_m + 1)\bar{0},$$

falls $z_m < 9$. Dies sieht man, etwa für $m = 0$, mit der schon mehrfach benutzten geometrischen Reihenformel

$$\begin{aligned} 0,\bar{9} &= \frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \dots = \frac{9}{10}\Big(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \dots\Big) \\ &= \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = 1. \end{aligned}$$

Wenn dies bedacht wird, kann man sagen: Jedes reelle α mit $0 \le \alpha < 1$ besitzt genau eine unendliche Dezimaldarstellung (ohne 9–Periode) und jeder solche Dezimalbruch definiert ein solches α.
Unter den reellen Zahlen gibt es einige, bei denen das Ziffernmuster sich ab einer Stelle periodisch wiederholt, z.B.

$$0,1789\,31\,31\,31 \dots = 0,1789\,\overline{31}.$$

Der Block 1789 wird als (kürzeste) **Vorperiode**, 31 als (kürzeste) **Periode** bezeichnet. Es gibt auch viele ohne Periodizität, z.B.

$$0,101\,001\,0001\,00001\dots$$

Die wohlbekannte, aber an der Schule im allgemeinen nicht bewiesene Aussage ist der
Satz 2. Sei $0 \le \alpha < 1$ eine reelle Zahl mit der Dezimaldarstellung $0, z_1 z_2 z_3 \dots$ (ohne Neunerperiode). Im Fall der Periodizität ab einer Stelle ist α rational. Bei Nicht–Periodizität der Ziffernfolge (ab einer Stelle) ist α irrational.
Der Beweis für die einfachere Aussage „Ein periodischer Dezimalbruch beschreibt eine rationale Zahl“ soll hier kurz geführt werden.
Zuerst im Fall, dass keine Vorperiode auftritt.

$$\begin{aligned} \alpha &= 0,\overline{z_1 \dots z_k} \\ &= \Big(\frac{z_1}{10} + \dots + \frac{z_k}{10^k}\Big) + \Big(\frac{z_1}{10^{k+1}} + \dots + \frac{z_k}{10^{2k}}\Big) + \dots \\ &= \Big(\frac{z_1}{10} + \dots + \frac{z_k}{10^k}\Big) + \frac{1}{10^k}\,\Big(\frac{z_1}{10} + \dots + \frac{z_k}{10^k}\Big) + \dots \\ &= \Big(\frac{z_1}{10} + \dots + \frac{z_k}{10^k}\Big)\Big(1 + \frac{1}{10^k} + \frac{1}{10^{2k}} + \frac{1}{10^{3k}} + \dots\Big) \\ &= \Big(\dots\Big)\,\frac{1}{1 - \frac{1}{10^k}} \quad \text{nach der geometrischen Reihenformel.} \\ &= \Big(\dots\Big)\,\frac{10^k}{10^k - 1}. \end{aligned}$$

Der letzte Ausdruck ist eine rationale Zahl.

Falls eine Vorperiode auftritt, kann dies durch einen einfachen Trick auf den obigen Fall zurückgeführt werden. Hat β die Darstellung

$$\beta = 0, w_1 w_2 \dots \quad \text{mit den Ziffern} \quad w_1, w_2, \dots$$

dann ist

$$\begin{aligned} 10\beta &= w_1 + 0, w_2 w_3 w_4 \dots , \\ 10^2\beta &= 10w_1 + w_2 + = 0, w_3 w_4 w_5 \dots , \\ 10^v\beta &= 10^{v-1} w_1 + 10^{v-2} w_2 + \cdots + w_v + 0, w_{v+1} w_{v+2} \dots . \end{aligned}$$

Hat also α die Gestalt $\alpha = 0, z_1 \dots z_v\ \overline{w_1 \dots w_k}$, dann ist

$$10^v\alpha = 10^{v-1} z_1 + \cdots + z_v + 0, \overline{w_1 \dots w_k} .$$

Der letzte Bruch ist rational, also auch die rechte Seite und damit $\alpha = 10^{-v} \cdot$ rechte Seite. Mit Satz 2 sieht man sofort die Irrationalität der Zahlen

$$\begin{aligned} &0, 101\,001\,00001 \dots \\ &0, 1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8\,9\,10\,11\,12\,13 \dots \end{aligned}$$

Beim letzten Beispiel werden die natürlichen Zahlen der Reihe nach hintereinander geschrieben. Wie sieht man, dass keine Periodizität vorliegt? Falls die Periode die Länge 1 hat, tritt ab einer Stelle nur noch eine Ziffer auf, was nach der Konstruktion nicht sein kann. Falls Periodizität mit kürzester Periodenlänge $k \geq 2$ vorliegt, hat ab einer Stelle jeder Ziffernblock der Länge k mindestens zwei verschiedene Ziffern. Jedoch die Zahlen $1,\ 11,\ 111,\ 1111, \dots$ liefern beliebig lange Blöcke aus lauter Einsen.

So leicht es nach diesem Rezept ist, Irrationalzahlen zu konstruieren, so schwierig, ja unmöglich ist es, bei vorgegebenen Zahlen wie $\sqrt{2},\ e$ oder π hiermit die Irrationalität einzusehen. Bei keiner dieser Zahlen kennt man eine Gesetzmäßigkeit für die Folge der Ziffern. Zum Beispiel bei π kann man heute die ersten Milliarden Ziffern berechnen. Es ist aber keinerlei Muster oder Gesetzmäßigkeit in der Ziffernfolge zu erkennen. Umgekehrt ist dies noch kein Beweis für die Irrationalität. Die Vorperiode könnte ja die Länge 10^{100} haben.

4. Wieder fragt man, ob unter den Irrationalzahlen differenziert werden kann. Unter den vielen Möglichkeiten ist die Gängigste die Unterscheidung zwischen

algebraisch und **transzendent**.

Was heißt algebraisch? Eine rationale Zahl $\alpha = \frac{a}{n} \neq 0$ genügt der Gleichung $n\alpha - a = 0$, d.h. α ist Nullstelle des Polynoms

$$p(x) = nx - a$$

p ist ein Polynom ersten Grades mit ganzen Koeffizienten. **Polynom** soll hier immer im Sinn **mit ganzen Koeffizienten** gemeint sein. Die rationalen Zahlen $\neq 0$ können daher auch charakterisiert werden als die Menge der Nullstellen aller Polynome ersten Grades.

Die Irrationalzahl $\sqrt{2}$ ist Nullstelle des Polynoms

$$p(x) = x^2 - 2.$$

Dies ist vom Grad 2. $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ ist Nullstelle zu

$$p(x) = x^4 - 10x^2 + 1$$

und man findet kein Polynom ersten, zweiten oder dritten Grades, das $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ als Nullstelle hat.
Demgemaß heißt eine reelle Irrationalzahl α **algebraisch vom Grad n** (≥ 2), wenn es

1) Ein Polynom p (mit ganzen Koeffizienten) und Grad n gibt, so dass $p(\alpha) = 0$, und

2) $p(\alpha) \neq 0$ für alle Polynome vom Grad $< n$.

Die Menge der algebraischen Zahlen vom Grad $2, 3, \ldots$ wird kurz als Menge aller reellen algebraischen Irrationalzahlen bezeichnet. Alle übrigen reellen Zahlen – sofern es überhaupt welche gibt – heißen **reell transzendent**.
Hier ist die Problematik wesentlich größer als bei der Unterscheidung rational – irrational. Zum Beispiel kann man nur bei sehr speziellen Zahlen mit Hilfe der Dezimalentwicklung entscheiden, ob sie transzendent ist.
Joseph Liouville konnte um 1860 als erster zeigen, das es transzendente Zahlen gibt, und auch konkrete Beispiele angeben. Eine solche „Liouville–Zahl" ist

$$\alpha = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{10^{\nu!}} = 1{,}1\,1\,0\,0\,0\,1\,0\ldots$$

mit Einsen nach dem Komma an den Stellen $1! = 1,\ 2! = 2,\ 3! = 6,\ 4! = 24,\ 5! = 120, \ldots$. Also sehr rasch wachsende Blöcke von Nullen mit jeweils einer Eins dazwischen. Der Beweis könnte mit Kenntnissen aus der Differentialrechnung und großer Konzentration in ein bis zwei Stunden hier besprochen werden.
Warum ist die Frage nach der Transzendenz der Zahl π von Interesse? Die alten Griechen stellten die Frage, ob es möglich ist, allein mit Zirkel und Lineal in endlich vielen Schritten einen Kreis vom Radius 1 in ein flächengleiches Quadrat umzuwandeln. **Quadratur des Kreises**. Wichtig ist, dass endlich viele Schritte für die exakte Umwandlung genügen. Ist a die gesuchte Seitenlänge, dann besteht die Gleichung

$$\text{Kreisfläche } = \pi \cdot 1^2 = \pi = a^2, \quad \text{also} \quad a = \sqrt{\pi}.$$

Pierre Laurent Wantzell zeigte um 1840, dass, falls es eine solche Konstruktion gibt, $\sqrt{\pi}$ algebraisch mit Zweierpotenzgrad ist. Dann muss auch π algebraisch sein. Denn es ist $\pi = \sqrt{\pi} \cdot \sqrt{\pi}$ und man kann zeigen, dass mit einer algebraischen Zahl auch ihr Quadrat algebraisch ist.
Wenn es also gelingt, die Transzendenz von π zu zeigen, dann ist damit die Unmöglichkeit der Quadratur des Kreises bewiesen. Alle Versuche, auch mit noch so raffinierten Konstruktionen, sind dann von vornherein zum Scheitern verurteilt.

Die Frage erwies sich als außerordentlich schwierig. 1873 zeigte **Charles Hermite** in einem sehr kunstvollen Beweis, dass ***e* transzendent** ist. Dabei wird die Eigenschaft der Exponentialfunktion $(e^x)' = e^x$ entscheidend genutzt. Knapp zehn Jahre später (1882) konnte **Ferdinand Lindemann**, damals Professor in Freiburg, die Hermiteschen Ideen auf π übertragen.

π ist eine transzendente Zahl, die Quadratur des Kreises ist unmöglich.

Der Beweis, der Studierenden im zweiten oder dritten Studienjahr in einigen Doppelstunden vorgeführt werden kann, gehört zu den ganz großen Leistungen der Mathematik.