Albert–Ludwigs–Universität Freiburg
Institut für Mathematik
Abteilung für Reine Mathematik
PD Dr. K. Halupczok
Dipl.–Math. S. Feiler

Übungen zur Vorlesung

Elementare Zahlentheorie

Sommersemester 2009

Anwesenheitsaufgaben

22.–24. April 2009

Anwesenheitsaufgabe 1
Zeigen Sie

$$\left\{n \in \mathbb{N}; n = \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor \cdot 4 + r \text{ mit } r \in \{0,1,3\}\right\}$$
$$\subseteq \left\{ u^2 - v^2 \in \mathbb{N} \,; u \in \mathbb{N}, v \in \mathbb{N}_0 \text{ und } u - v \in \{1,2\}\right\}!$$

(Das heißt, jede natürliche Zahl, die bei Division durch 4 nicht den Rest 2 lässt, ist die Differenz der Quadrate zweier verschiedener natürlicher Zahlen, deren Differenz höchstens 2 beträgt.)

Anwesenheitsaufgabe 2
Zeigen Sie, dass keine Quadratzahl beim Teilen durch 5 den Rest 2 oder den Rest 3 liefert.

Anwesenheitsaufgabe 3
Zeigen Sie, dass jede Quadratzahl beim Teilen durch 4 den Rest 0 oder den Rest 1 liefert.

Anwesenheitsaufgabe 4
Zeigen Sie $\left\{ \sum_{j=0}^{n} 10^j \in \mathbb{N} \,; n \in \mathbb{N} \right\} \cap \{ k^2 \in \mathbb{N} \,; k \in \mathbb{N}\} = \emptyset$.

Anwesenheitsaufgabe 5
Zeigen Sie, dass $\left\{ 1 + \prod_{p \in \mathcal{P}} p \in \mathbb{N} \,; \{2\} \subseteq \mathcal{P} \subseteq \mathbb{P} \right\}$ keine Quadratzahl enthält.

Anwesenheitsaufgabe 6
Zeigen Sie $(a, a+n)\,|n$ für alle $a \in \mathbb{Z}$ und alle $n \in \mathbb{N}$!

Anwesenheitsaufgabe 7
Seien $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}$ und $d \in \mathbb{Z}$ mit $d|a$, $d|b$ und $a^2 + b^2 \neq 0$. Zeigen Sie

$$|d| = (a,b) \quad \Longleftrightarrow \quad \left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = 1 \qquad !$$

Anwesenheitsaufgabe 8
Seien $a \in \mathbb{Z}$ und $b \in \mathbb{Z}$ mit $a^2 + b^2 \neq 0$. Zeigen Sie $\quad (a,b) = [a,b] \quad \Longleftrightarrow \quad |a| = |b| \qquad !$

Anwesenheitsaufgabe 9
Seien $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}$ und $c \in \mathbb{Z}$ mit $a^2 + b^2 \neq 0$, $(a,b) = 1$ und $c|\,(a+b)$.
Zeigen oder widerlegen Sie $(a+b, ab) = 1$ und $(a,c) = (b,c) = 1 \quad !$

Anwesenheitsaufgabe 10
Seien $\mathcal{V} : \left\{ \begin{array}{ccl} \mathbb{Z} & \to & \{\mathcal{D}\,; \mathcal{D} \subseteq \mathbb{N}_0\} \\ a & \mapsto & \mathcal{V}(a) := \{\,|a|\,p \in \mathbb{N}_0 \,; p \in \mathbb{P}\} \end{array} \right\}$ und $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^2 \setminus \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ mit $(a,b) = 1$.
Zeigen Sie, dass aus $\mathcal{V}(a) \cap \mathcal{V}(b) \neq \emptyset$ entweder $a = b$ mit $|a| = 1$ oder $\{|a|, |b|\} \subseteq \mathbb{P}$ folgt!