Albert–Ludwigs–Universität Freiburg
Institut für Mathematik
Abteilung für Reine Mathematik
PD Dr. K. Halupczok
Dipl.–Math. S. Feiler

Vorlesung

Elementare Zahlentheorie

Sommersemester 2009

Klausur

22. Juli 2009

Datum: Mittwoch, der 22. Juli 2009
Ort: Hörsaal Rundbau, Albertstraße 21
Zeit: $14.\underline{^{00}}$ Uhr bis $16.\underline{^{00}}$ Uhr

Bitte füllen Sie die folgende Tabelle leserlich und in Druckbuchstaben aus!
Schreiben Sie außerdem auf jedes Blatt, das Sie abgeben, Ihren vollständigen Namen und Ihre Matrikelnummer!

Vorname: ______________________________

Nachname: ______________________________

Geburtsort: ______________________________

Studienfach: ______________________________

Abschlussart: ______________________________

Matrikelnummer: ______________________________

Klausurnummer: ______________________________

Ihre Klausurnummer bekommen Sie ausgeteilt. Es handelt sich um eine zufällige Zahl.
Das Klausurergebnis wird unter dieser Klausurnummer veröffentlicht.
Wenn Sie keine Veröffentlichung wünschen, dann lassen Sie das entsprechende Feld bitte frei!

Die nun folgende Tabelle wird bei der Korrektur ausgefüllt.
Bitte lassen Sie diese Tabelle frei!

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	**Summe**	**Note**
Punkte										

Klausuraufgabe 1
Bestimmen Sie alle durch 7 teilbaren $n \in \mathbb{N}$, für die $n \equiv 1 \bmod 4$, $n \equiv 1 \bmod 5$ und $n \equiv 1 \bmod 6$ gilt.

Klausuraufgabe 2
Zeigen Sie:
Sind $p_1, \ldots, p_{\omega(m)} \in \mathbb{P}$ die verschiedenen Primteiler von $m \in \mathbb{N}$ und gilt $\varphi\left(p_1 \cdots p_{\omega(m)}\right) \mid m$, so folgt $m = \varphi\left(\frac{m \cdot p_1 \cdots p_{\omega(m)}}{\varphi\left(p_1 \cdots p_{\omega(m)}\right)}\right)$.

Klausuraufgabe 3
Seien $p \in \mathbb{P}$ und $a \in \mathbb{Z}$ mit $(a,p) = 1$ und $\operatorname{ord}_p(a) = 3$.
Zeigen Sie, dass $(a+1,p) = 1$ gilt.

Klausuraufgabe 4
Bestimmen Sie alle Lösungen der Kongruenz $\quad (x+2)^4 - 2x^2 - 8x - 7 \equiv 0 \bmod 163.$

Klausuraufgabe 5
Zeigen Sie: Für alle $a \in \{99, 999, 9999, 99999, \ldots\}$ gilt $\quad 11 | a \quad$ oder $\quad \left(\frac{11}{a}\right) = -1.$

Klausuraufgabe 6
Beweisen Sie die Identität $\quad \Lambda \cdot \ln + \Lambda * \Lambda = \mu * \ln^2.$

Klausuraufgabe 7
Begründen Sie, warum die Zahlen der Form $(M_p + 1) \cdot k - 1$ mit $M_p := 2^p - 1$, $p \in \mathbb{P} \setminus \{2\}$ und $k \in \mathbb{N}$ nicht als Summe dreier Quadratzahlen geschrieben werden können.

Klausuraufgabe 8
Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $\mu^2(n) \cdot \omega(n) = 2$ gegeben.
Wie lässt sich ein nicht–trivialer Teiler von n bestimmen, wenn die Werte n und $\varphi(n)$ bekannt sind?