Albert–Ludwigs–Universität Freiburg
Institut für Mathematik
Abteilung für Reine Mathematik
PD Dr. K. Halupczok
Dipl.–Math. S. Feiler

Übungen zur Vorlesung

Elementare Zahlentheorie

Sommersemester 2009

1. Übungsblatt

20. April 2009

Abgabe der Lösungen bis zum **27. April 2009 um 14.$\underline{^{15}}$ Uhr**

Aufgabe 1 (Dreiecksungleichungen für die Gauss–Klammer)
Seien $x \in \mathbb{R}$ und $y \in \mathbb{R}$ beliebig.

a) Zeigen Sie $\lfloor x + y \rfloor = x + \lfloor y \rfloor$, falls $x \in \mathbb{Z}$ ist!
Zeigen Sie $\lfloor y \rfloor \leq y < \lfloor y \rfloor + 1$!

b) In welchen Fällen ist $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor < \lfloor x + y \rfloor$?
In welchen Fällen ist $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor = \lfloor x + y \rfloor$?
In welchen Fällen ist $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor > \lfloor x + y \rfloor$?
Beweisen Sie Ihre Antworten!

c) Zeigen Sie $\lfloor x \rfloor \lfloor y \rfloor \leq \lfloor xy \rfloor$, falls $\min\{x, y\} \geq 0$ ist!

d) Zeigen Sie $\left\lfloor \frac{x}{y} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\lfloor x \rfloor}{y} \right\rfloor$, falls $y \in \mathbb{N}$ ist!

Aufgabe 2 (ggT, kgV und Euklidischer Algorithmus)

a) Geben Sie ein $(x, y, z)^T \in \mathbb{Z}^3$ mit $(960, 504, 420) = x \cdot 960 + y \cdot 504 + z \cdot 420$ an!

b) Berechnen Sie $[912, 336]$ unter Verwendung des Euklidischen Algorithmus' mit absolut kleinsten Resten und berechnen Sie $(912, 336)$ unter Verwendung des Euklidischen Algorithmus' mit kleinsten nichtnegativen Resten!

Aufgabe 3 (Teilbarkeit)

a) Zeigen Sie, dass $2a^3 + 3a^2 + a$ für alle $a \in \mathbb{Z}$ von 6 geteilt wird!

b) Zeigen Sie, dass 24 jedes Element der Menge $\left\{ b^2 + 23 \in \mathbb{N}\, ; b \in \mathbb{Z}, 2 \nmid b \text{ und } 3 \nmid b \right\}$ teilt!

Aufgabe 4 (Endliche Kettenbrüche)
Ein „endlicher Kettenbruch“ ist ein Gebilde der Form $a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\ddots + \frac{1}{a_k}}}}}$ mit $k \in \mathbb{N}_0$, $a_0 \in \mathbb{Z}$ und $a_n \in \mathbb{N}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \leq k$.
Man sieht leicht ein, dass jeder endliche Kettenbruch eine rationale Zahl darstellt.

a) Prüfen Sie, ob jeder Bruch $\frac{p}{q}$ mit $p \in \mathbb{Z}$ und $q \in \mathbb{N}$ als endlicher Kettenbruch geschrieben werden kann!
Beweisen Sie Ihr Ergebnis!

b) Welche rationale Zahlen können in eindeutiger Weise als Kettenbruch geschrieben werden?
Begründen Sie Ihre Antwort!

c) Stellen Sie $\frac{118}{303}$ als Kettenbruch dar und geben Sie $3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{5 + \frac{1}{9}}}}}$ in der Form $\frac{p}{q}$ mit $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$ und $(p, q) = 1$ an!