

Abgabe der Lösungen bis zum **11. Mai 2009 um 14.¹⁵ Uhr**

Aufgabe 9 (CARMICHAEL–Zahlen — Teil 1)

Eine Zahl $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ heißt **CARMICHAEL–Zahl**, wenn $n \notin \mathbb{P}$ ist, aber die FERMAT–Kongruenz $a^n \equiv a \pmod{n}$ für alle $a \in \mathbb{Z}$ erfüllt.

- a) Zeigen Sie, dass $a^{561} \equiv a \pmod{561}$ für alle $a \in \mathbb{Z}$ mit $(a, 561) = 1$ ist!
(Bemerkung: Später werden Sie beweisen, dass 561 die kleinste CARMICHAEL–Zahl ist.)
- b) Seien $d \in \mathbb{N}$ und $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie für alle $R \in \{|\, \}\}$

$$d R n \quad \implies \quad (a^d - 1) R (a^n - 1) \quad \text{für alle } a \in \mathbb{N} \setminus \{1\}!$$

(Tipp: Es ist $a^n - 1 = (a^{st} - 1) + a^{st} \cdot (a^{n-st} - 1)$ für alle $a \in \mathbb{N}$, und alle $(s, t)^T \in \mathbb{N}_0^2$.)

- c) Seien $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{P}$ mit $1 < \#\mathcal{P} < \infty$ und $n := \prod_{p \in \mathcal{P}} p$.

Zeigen Sie, dass n eine CARMICHAEL–Zahl ist, falls $(p - 1) \mid (n - 1)$ für alle $p \in \mathcal{P}$ gilt!

Aufgabe 10 (Ein Streichholzspiel)

Bei einem Spiel liegt eine bestimmte Anzahl Streichhölzer auf einem Tisch. Zwei Spieler nehmen nun abwechselnd beliebig viele, aber mindestens eines der Streichhölzer weg. Die Menge an Streichhölzern, die genommen wird, ist nur durch die Spielregel begrenzt.

Wer das letzte Streichholz nimmt, verliert.

- a) Wer gewinnt, wenn man pro Zug maximal sechs Streichhölzer nehmen darf?
- b) Wer gewinnt, wenn man pro Zug maximal die Hälfte der noch vorhandenen Streichhölzer nehmen darf (abgesehen von der Situation, dass nur noch ein Streichholz übrig ist — dieses muss natürlich genommen werden)?
- c) Sie dürfen anfangen, wissen aber nicht, wieviele Streichhölzer auf den Tisch gelegt werden. Welche Spielregel wählen Sie?

Aufgabe 11 (Reziprokensummen, die keine ganzen Zahlen ergeben)

- a) Zeigen Sie $\#\left(\left\{\sum_{j=1}^n \frac{1}{j} \in \mathbb{Q}; n \in \mathbb{N}\right\} \cap \mathbb{Z}\right) = 1$!

(Tipp: Geben Sie eine natürliche Zahl an, mit der die Summe multipliziert werden kann, so dass nur noch ein echt rationaler Summand übrig bleibt.)

- b) Sei $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{P}$ mit $2 \in \mathcal{P}$ und $\#\mathcal{P} < \infty$. Zeigen Sie $\sum_{p \in \mathcal{P}} \frac{1}{p} \notin \mathbb{Z}$!

Aufgabe 12 (Abschätzungen der Anzahl der Primzahlen unterhalb einer gegebenen Schranke)

Sei $\pi : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{N}_0 \\ x \mapsto \pi(x) := \#\{p \in \mathbb{P} ; p \leq x\} \end{array} \right\}$.

a) Zeigen Sie $\pi(x) \leq \frac{x}{3}$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq 33$.

b) Zeigen Sie $\pi(x) \geq \frac{1}{\ln(2)} \cdot \ln\left(\frac{\ln(x)}{\ln(2)}\right)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq 2$.

(Tipp: Es ist $\frac{1}{\ln(2)} \cdot \ln\left(\frac{\ln(x)}{\ln(2)}\right) = \log_2(\log_2(x))$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq 2$.)

Der EUKLIDISCHE Beweis zur Unendlichkeit der Primzahlmenge zeigt $p_n \leq 2^{2^{n-1}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, wenn p_n die n -te Primzahl bezeichnet.)