Albert–Ludwigs–Universität Freiburg
Institut für Mathematik
Abteilung für Reine Mathematik
PD Dr. K. Halupczok
Dipl.–Math. S. Feiler

Übungen zur Vorlesung

Elementare Zahlentheorie

Sommersemester 2009

9. Übungsblatt

22. Juni 2009

Abgabe der Lösungen bis zum **29. Juni 2009 um 14.$\underline{^{15}}$ Uhr**

Aufgabe 33 (Kongruenzengleichung) 6 Punkte
Finden Sie alle $x \in \mathbb{Z}$ mit $x^4 + 16x^2 + 54 \equiv 0 \bmod 107$!
Bemerkung: Für Multiplikationen, die beim Schnellen Potenzieren benötigt werden, dürfen Sie einen Taschenrechner verwenden.

Aufgabe 34 (Spezielle pythagoräische Tripel)

a) Zeigen Sie, dass es unendlich viele pythagoräische Tripel gibt, in denen die beiden kleineren Zahlen aufeinander folgen! (2 Punkte)

Tipp: Zeigen Sie, dass mit $(x, x+1, z)^T \in \mathbb{N}^3$ auch $(3x+2z+1, 3x+2z+2, 4x+3z+2)^T$ pythagoräisch ist!

b) Zeigen Sie, dass es unendlich viele primitive pythagoräische Tripel gibt, in denen die beiden kleineren Zahlen den Abstand 1 voneinaner haben! (0,5 Punkte)

c) Die Zahl $\sum_{j=1}^{n} j$ heißt Dreieckszahl zur Zahl $n \in \mathbb{N}$.

Zeigen Sie, dass es unendlich viele pythagoräische Tripel gibt, in denen die zwei kleineren Zahlen Dreieckszahlen zu aufeinanderfolgenden Zahlen sind! (1,5 Punkte)

Tipp: Verwenden Sie Aufgabenteil a) und wählen Sie als kleinste Zahl des gesuchten Tripels die Dreieckszahl zum Doppelten der kleinsten Zahl aus dem Ursprungs–Tripel!

Aufgabe 35 (60 teilt das Produkt der Zahlen eines pythagoräischen Tripels) 2 Punkte
Zeigen Sie, dass das Produkt von drei zu einem pythagoräischen Tripel zusammensetzbaren Zahlen stets durch 60 teilbar ist!

Aufgabe 36 (Summen von Quadraten)

a) Verwenden Sie den Vier–Quadrate–Satz von LAGRANGE 4.6, dass jede natürliche Zahl als Summe von vier Quadraten ganzer Zahlen darstellbar ist, um zu beweisen, dass jede natürliche Zahl oberhalb der 169 als Summe von mindestens zwei und höchstens fünf Quadraten nichtverschwindender ganzer Zahlen darstellbar ist! (1 Punkt)

$$\left(\forall\, n \in \mathbb{N} \text{ mit } n > 169 \,\exists\, \ell \in \{2,3,4,5\} \text{ und } \forall\, j \in \mathbb{N} \text{ mit } j \leq \ell \exists\, x_j \in \mathbb{N} \text{ mit } n = \sum_{j=1}^{\ell} x_j^2\right)$$

Tipp: Betrachten Sie die Darstellbarkeit von 169 als Summe von Quadraten!

b) Zeigen Sie, dass sich jede ungerade natürliche Zahl als Summe zweier Quadrate von aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen mit zwei Quadraten beliebiger ganzer Zahlen darstellen lässt! (3 Punkte)

$$\left(\forall\, n \in \mathbb{N} \exists\, x \in \mathbb{Z} \exists\, y \in \mathbb{Z} \exists\, z \in \mathbb{Z} \text{ mit } 2n+1 = x^2 + y^2 + z^2 + (z+1)^2\right)$$

Tipp: Betrachten Sie die Möglichkeit, $4n+1$ mit $n \in \mathbb{N}$ als Summe dreier Quadrate ganzer Zahlen darzustellen und die Anzahl der dabei verwendeten ungeraden Summanden!