Albert–Ludwigs–Universität Freiburg
Institut für Mathematik
Abteilung für Reine Mathematik
PD Dr. K. Halupczok
Dipl.–Math. S. Feiler

Übungen zur Vorlesung

Elementare Zahlentheorie

Sommersemester 2009

10. Übungsblatt

29. Juni 2009

Abgabe der Lösungen bis zum **06. Juli 2009 um 14.$^{\underline{15}}$ Uhr**

Aufgabe 37 (Teiler von Mersenne–Zahlen)
Beweisen Sie die folgenden beiden Behauptungen!

a) Sind $p \in \mathbb{P} \setminus \{2\}$ und $d \in \mathbb{N}$ ein Teiler von M_p, so gibt es ein $k \in \mathbb{N}_0$ mit $d = 2kp + 1$.
(*Tipp:* Betrachten Sie zunächst die Primteiler von M_p !) (2,5 Punkte)

b) Sind $p \in \mathbb{P} \setminus \{2\}$ und $q \in \mathbb{P}$ ein Teiler von M_p, so gibt es ein $r \in \{-1, 1\}$ mit $q \equiv r \bmod 8$. (1,5 Punkte)

Aufgabe 38 (σ_α und prime Werte von σ)
Seien $a : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{P} & \to & \mathbb{N}_0 \\ p & \mapsto & a_p \end{array} \right\}$ derart, dass $\# \{p \in \mathbb{P} \, ; a_p \neq 0\} < \infty$ ist und $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

a) Zeigen Sie $\sigma_\alpha \left(\prod_{p \in \mathbb{P}} p^{a_p} \right) = \prod_{p \in \mathbb{P}} \frac{p^{\alpha \cdot (a_p + 1)} - 1}{p^\alpha - 1}$ und schließen Sie, dass σ_α multiplikativ ist! (2 Punkte)

b) Zeigen Sie für alle $m \in \mathbb{N}$, dass mit $\sigma(m) \in \mathbb{P}$ auch $\tau(m) \in \mathbb{P}$ gelten muss! (2 Punkte)

Aufgabe 39 (Die Primfaktorzerlegung ungerader vollkommener Zahlen)
Sei $n \in \mathbb{N}$ eine ungerade vollkommene Zahl.
Zeigen Sie, dass es ein $p \in \mathbb{P}$ mit $p \equiv 1 \bmod 4$, ein $\ell \in \mathbb{N}_0$ und ein $m \in \mathbb{N}$ mit $p \nmid m$ und $n = p^{4\ell+1} \cdot m^2$ gibt! Insbesondere ist $n \equiv 1 \bmod 4$.
(*Tipp:* Unterscheiden Sie die Primteiler von n nach ihren Resten modulo 4 !)

Aufgabe 40 (Faltungsidentitäten)
Seien $\tilde{\tau} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{C} \\ n & \mapsto & \tilde{\tau}(n) := \tau(n^2) \end{array} \right\}$, $\hat{\tau} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{C} \\ n & \mapsto & \hat{\tau}(n) := n \cdot \tau(n) \end{array} \right\}$,
$\tilde{\omega} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{C} \\ n & \mapsto & \tilde{\omega}(n) := 2^{\omega(n)} \end{array} \right\}$ und $\mathrm{id} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{C} \\ n & \mapsto & \mathrm{id}(n) := n \end{array} \right\}$.

a) Zeigen Sie $\tilde{\tau} = \tilde{\omega} * \mathbb{1}$! (1,5 Punkte)

b) Zeigen Sie $\tau^3 * \mathbb{1} = (\tau * \mathbb{1})^2$! (1 Punkt)
(*Bemerkung:* Sie dürfen die Summenformeln für die Potenzen der natürlichen Zahlen unterhalb einer festen Schranke ohne Beweis verwenden.)

c) Zeigen Sie $\sigma * \mathrm{id} = \hat{\tau} * \mathbb{1}$! (1,5 Punkte)