Albert–Ludwigs–Universität Freiburg
Institut für Mathematik
Abteilung für Reine Mathematik
PD Dr. K. Halupczok
Dipl.–Math. S. Feiler

Übungen zur Vorlesung

Elementare Zahlentheorie

Sommersemester 2009

11. Übungsblatt

06. Juli 2009

Abgabe der Lösungen bis zum **13. Juli 2009 um 14.$\underline{^{15}}$ Uhr**

Aufgabe 41 (Bachmann–Landau–Symbolik) 3 Punkte

Zeigen Sie unter Verwendung von Satz 4.5 für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x > 1$

$$\#\left\{n \in \mathbb{N}\,; n \leq x \text{ und } \exists\ (u,v,w)^T \in \mathbb{Z}^3 \text{ mit } n = u^2+v^2+w^2\right\} = \frac{5}{6}\cdot x + O\left(\ln(x)\right) \qquad !$$

Aufgabe 42 (Faltungsidentität für μ^2) 2 Punkte

Sei $\tilde{\omega} : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{C} \\ n & \mapsto & \tilde{\omega}(n) := 2^{\omega(n)} \end{array}\right\}$. Zeigen Sie $\tilde{\omega} * \mu = \mu^2$!

(*Tipp:* Verwenden Sie die Möbiussche Umkehrformel!)

Aufgabe 43 (Distributivgesetz für Multiplikation und Faltung) 3 Punkte

a) Seien $f \in \mathcal{F}$ und $g \in \mathcal{F}$. Sei $h \in \mathcal{F}$ vollständig multiplikativ.
Zeigen Sie die Gültigkeit des Distributivgesetzes

$$(f * g)\cdot h = (f\cdot h) * (g \cdot h) \qquad !$$

(Die Multiplikation zweier Funktionen ist dabei punktweise definiert.) (1 Punkt)

b) Zeigen Sie, dass das Distributivgesetz im Allgemeinen für multiplikative Funktionen nicht gilt! (1 Punkt)

c) Zeigen Sie, dass das umgekehrte Distributivgesetz

$$„(f\cdot g) * h = (f * h)\cdot(g * h)“$$

nicht mal gilt, wenn auch f und g vollständig multiplikativ sind! (1 Punkt)

bitte wenden

Aufgabe 44 (Äquivalenzen zur Vollständigen Multiplikativität einer multiplikativen Funktion)
Seien $f \in \mathcal{F}$ multiplikativ und $g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \rightarrow & \mathbb{C} \\ n & \mapsto & g(n) \end{array} \right\}$ mit $f * g = \varepsilon$.
Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden drei Aussagen!

a) f ist vollständig multiplikativ.

b) $g = \mu \cdot f$.

c) Für alle $p \in \mathbb{P}$ und alle $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ ist $g\left(p^k\right) = 0$.

Geben Sie das Faltungsinverse der Potenzfunktion $\cdot^\alpha : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \rightarrow & \mathbb{C} \\ n & \mapsto & n^\alpha \end{array} \right\}$ zu $\alpha \in \mathbb{R}$ in einer Form an, in der μ nicht mehr vorkommt!

Aufgabe 45 (Zur Größenordnung von τ)
Zeigen Sie die Gültigkeit der folgenden beiden Aussagen!
Verwenden Sie die Multiplikativität von τ und $\tau\left(p^k\right) = k + 1$ für alle $(p, k)^T \in \mathbb{P} \times \mathbb{N}_0$ ohne Beweis!

a) Für alle $\eta \in \mathbb{R}^+$ gibt es ein $C(\eta) \in \mathbb{R}^+$ mit $\tau(n) \leq C(\eta) \cdot n^\eta$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Das heißt für alle $\eta \in \mathbb{R}^+$ ist $\tau = O_\eta\left(\mathrm{id}^\eta\right)$. (3 Punkte)

(*Tipp:* Betrachten Sie zunächst für ein $n \in \mathbb{N}$ den Bruch $\dfrac{\tau(n)}{n^\eta}$ und dann die Anzahl der $(p, \ell)^T \in \mathbb{P} \times \mathbb{N}$ mit $\tau\left(p^\ell\right) > p^{\ell\eta}$ für ein festes $\eta \in \mathbb{R}^+$!)

b) Für alle $A \in \mathbb{R}^+$ und alle $C \in \mathbb{R}^+$ ist $\#\left\{n \in \mathbb{N}; \tau(n) > C \cdot \ln^A(n)\right\} = \infty$.
Das heißt für alle $A \in \mathbb{R}^+$ ist $\tau \neq O\left(\ln^A\right)$. (1 Punkt)
(*Tipp:* Wählen Sie zu $A \in \mathbb{R}^+$ ein $\ell \in \mathbb{N}$ mit $\ell > A + 1$ und ein $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{P}$ mit ℓ Elementen! Was gilt für die Potenzen von $\prod\limits_{p \in \mathcal{P}} p$?)